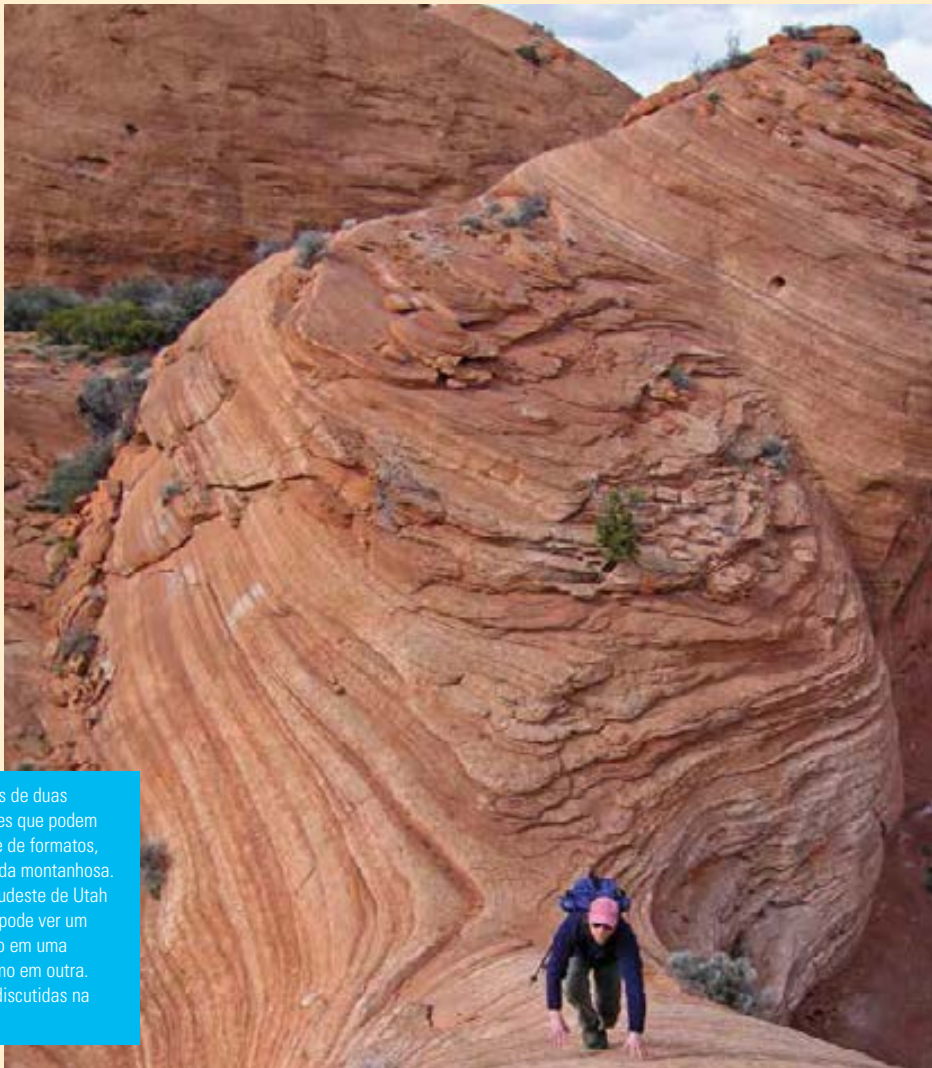


14

Derivadas Parciais

Os gráficos das funções de duas variáveis são superfícies que podem assumir uma variedade de formatos, incluindo sela ou estrada montanhosa. Nesta localização no sudeste de Utah (Arco de Phipps), você pode ver um ponto que é um mínimo em uma direção, mas um máximo em outra. Essas superfícies são discutidas na Seção 14.7.



Stan Wagon, Macalester College

Até aqui tratamos o cálculo de funções de uma única variável. No entanto, no mundo real, quantidades físicas frequentemente dependem de duas ou mais variáveis, de modo que, neste capítulo, focalizaremos nossa atenção em funções de várias variáveis e estenderemos nossas ideias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

14.1 Funções de Várias Variáveis

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

- verbalmente (pela descrição em palavras)
- numericamente (por uma tabela de valores)
- algebricamente (por uma fórmula explícita)
- visualmente (por um gráfico ou curvas de nível)

Funções de Duas Variáveis

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y , ou como uma função do par (x, y) . Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h . De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h , e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definição Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$.

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y) . As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**. [Compare com a notação $y = f(x)$ para as funções de uma única variável.]

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 1), no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z . Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal chata com o formato de D , podemos pensar que o eixo z é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subentendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido.

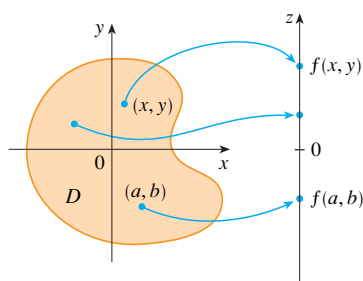


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

(a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

(b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

SOLUÇÃO

(a)
$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para f está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não negativo. Portanto, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) | x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$

A desigualdade $x + y + 1 \geq 0$, ou $y \geq -x - 1$, descreve os pontos que estão na linha $y = -x - 1$ ou acima dela, enquanto $x \neq 1$ significa que os pontos na linha $x = 1$ devem ser excluídos do domínio. (Veja a Figura 2.)

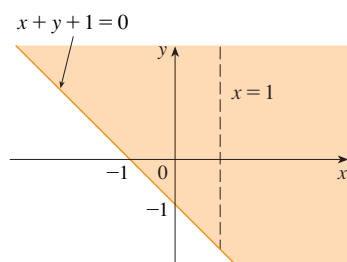


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

(b)
$$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Já que $\ln(y^2 - x)$ é definido somente quando $y^2 - x > 0$, isto é, $x < y^2$, o domínio de f é $D = \{(x, y) | x < y^2\}$. Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola $x = y^2$. (Veja a Figura 3.)

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimativas numéricas de seus valores.

EXEMPLO 2 Em regiões com inverno severo, o *índice de sensação térmica* é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v . Assim, W é uma função de T e de v , e podemos escrever $W = f(T, v)$. A Tabela 1 apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e pelo Serviço Meteorológico do Canadá.

TABELA 1 Índice de sensação térmica como função da temperatura do ar e velocidade do vento

		Velocidade do vento (km/h)										
Temperatura real (°C)	$T \backslash v$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
	5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
	-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
	-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
	-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
	-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
	-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
	-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52
	-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60
	-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é -5°C e a velocidade do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de -15°C sem vento. Portanto,

$$f(-5, 50) = -15$$

EXEMPLO 3 Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899–1922. Eles consideraram uma visão simplificada da economia em que a saída da produção é determinada pela quantidade de trabalho envolvido e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou-se bastante preciso. A função utilizada para modelar a produção era da forma

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

onde P é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano); L , a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano); e K , a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios). Na Seção 14.3, mostraremos como obter a Equação 1 a partir de algumas hipóteses econômicas.

Cobb e Douglas usaram dados econômicos publicados pelo governo para construir a Tabela 2. Eles tomaram o ano de 1899 como base e P , L e K foram tomados valendo 100 nesse ano. Os valores para outros anos foram expressos como porcentagens dos valores de 1899.

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da Tabela 2 à função

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

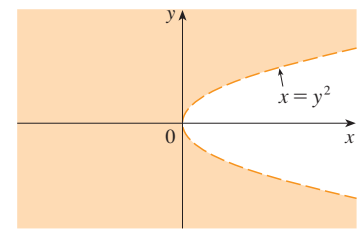


FIGURA 3

Domínio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

O Novo Índice de Sensação Térmica

Um novo índice de sensação térmica foi introduzido em novembro de 2001 e é muito mais preciso que o velho índice de medição de quanto frio se sente quando está ventando. O novo índice é baseado em um modelo de quão rápido um rosto humano perde calor. Foi desenvolvido por meio de ensaios clínicos nos quais voluntários eram expostos a uma variedade de temperaturas e velocidade do vento em um túnel de vento refrigerado.

TABELA 2

Ano	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

(Veja o Exercício 79 para detalhes.)

Se usarmos o modelo dado pela função na Equação 2 para calcular a produção nos anos de 1910 e 1920, obteremos os valores

$$P(147, 208) = 1,01(147)^{0,75}(208)^{0,25} \approx 161,9$$

$$P(194, 407) = 1,01(194)^{0,75}(407)^{0,25} \approx 235,8$$

que são muito próximos dos valores reais, 159 e 231.

A função de produção [1] foi usada posteriormente em muitos contextos, de empresas individuais até questões globais de economia. Ela passou a ser conhecida como **função de produção de Cobb-Douglas**. Seu domínio é $\{(L, K) \mid L \geq 0, K \geq 0\}$, pois, como L e K representam mão de obra e capital, não podem ser negativos.

EXEMPLO 4 Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUÇÃO O domínio de g é

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

que é o disco com centro $(0, 0)$ e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de g é

$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$$

Como z é a raiz quadrada positiva, $z \geq 0$. Da mesma forma, por causa de $9 - x^2 - y^2 \leq 9$, temos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

Assim, a imagem é

$$\{z \mid 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$$

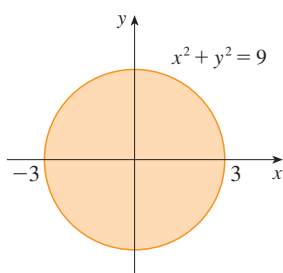


FIGURA 4
Domínio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

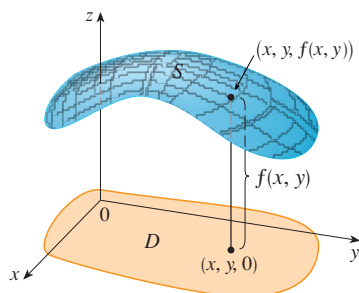


FIGURA 5

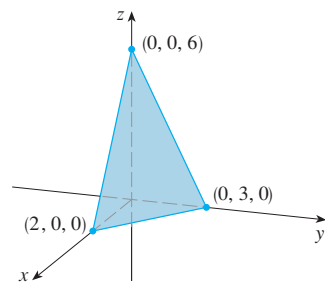


FIGURA 6

Gráficos

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D , então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D .

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função f com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos visualizar o gráfico S de f como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy (veja a Figura 5).

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUÇÃO O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano. Para desenharmos o plano, primeiro achamos as intersecções com os eixos. Colocando $y = z = 0$ na equação, obtemos $x = 2$ como a intersecção com o eixo x . Da mesma forma, a intersecção com y é 3 e a intersecção com z é 6. Isso nos permite esboçar a porção do gráfico pertencente ao primeiro octante na Figura 6.

A função do Exemplo 5 é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \quad \text{ou} \quad ax + by - z + c = 0$$

e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

EXEMPLO 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUÇÃO O gráfico tem a equação $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, ou $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como $z \geq 0$, o gráfico de g é somente a metade superior da esfera (veja a Figura 7).

OBSERVAÇÃO Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de x e y . Como vimos no Exemplo 6, o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ é representado pela função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O hemisfério inferior é representado pela função $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EXEMPLO 7 Utilize o computador para traçar o gráfico da função de produção de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de P para os valores de mão de obra L e capital K que estão entre 0 e 300. O computador utilizou os cortes verticais para desenhar a superfície. Vemos a partir desses cortes que o valor da produção P aumenta com o crescimento de L ou de K , como esperado.

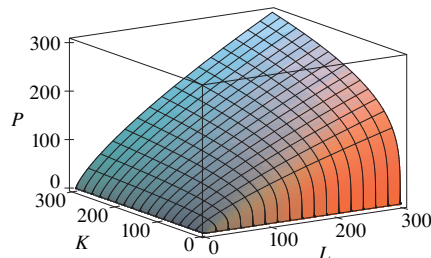


FIGURA 8

EXEMPLO 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO Observe que $h(x, y)$ é definida para todos os possíveis pares ordenados de números reais (x, y) e seu domínio é $\mathbb{R}^2$, o plano xy todo. A imagem de h é o conjunto $[0, \infty)$ de todos os reais não negativos. [Observe que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, portanto $h(x, y) \geq 0$ para todo x e y .]

O gráfico de h tem a equação $z = 4x^2 + y^2$, que é o parabolóide elíptico que esboçamos no Exemplo 4 na Seção 12.6. Os cortes horizontais são elipses e os cortes verticais são parábolas (veja a Figura 9).

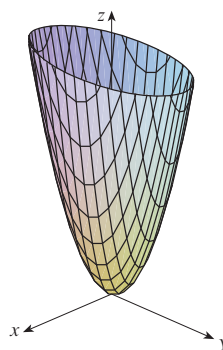


FIGURA 9

Gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. Na maioria desses programas, são desenhados os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ para os valores de k igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

A Figura 10 mostra uma série de gráficos de diversas funções, gerados por computador. Observe que obtemos uma visão melhor da função quando a giramos de modo a olhá-la por diferentes pontos de vista. Nos itens (a) e (b) o gráfico de f é achatado e próximo do plano xy , exceto perto da origem; isso se dá porque $e^{-x^2-y^2}$ é muito pequeno quando x ou y é grande.

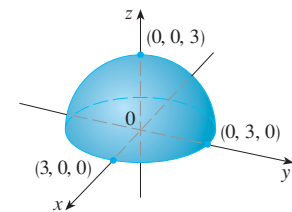
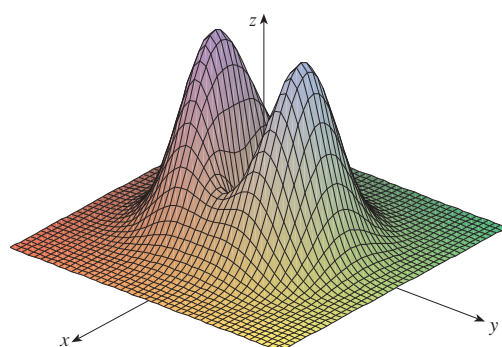
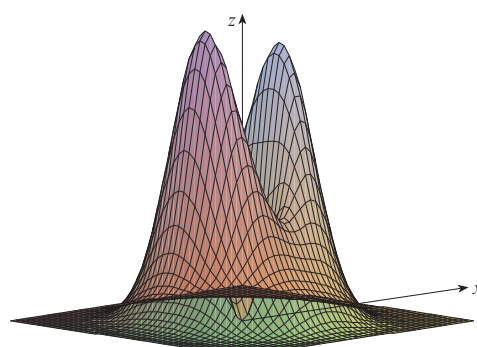


FIGURA 7

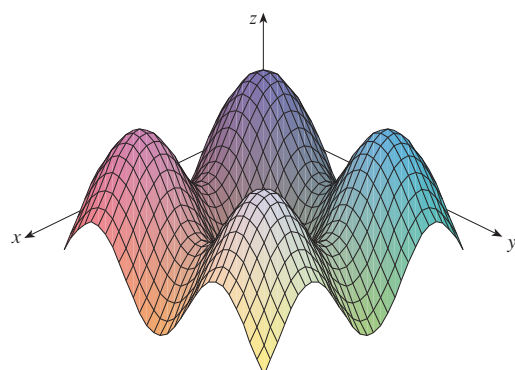
Gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



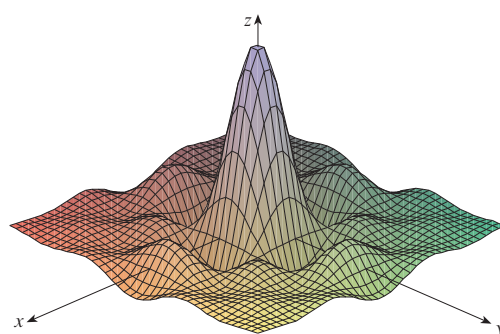
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(c) $f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y$



(d) $f(x, y) = \frac{\text{sen } x \text{ sen } y}{xy}$

FIGURA 10

Curvas de Nível

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: diagramas de flechas e gráficos. Um terceiro método, emprestado dos cartógrafos, é um mapa de contorno, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar *curvas de contorno* ou *curvas de nível*.

Definição As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

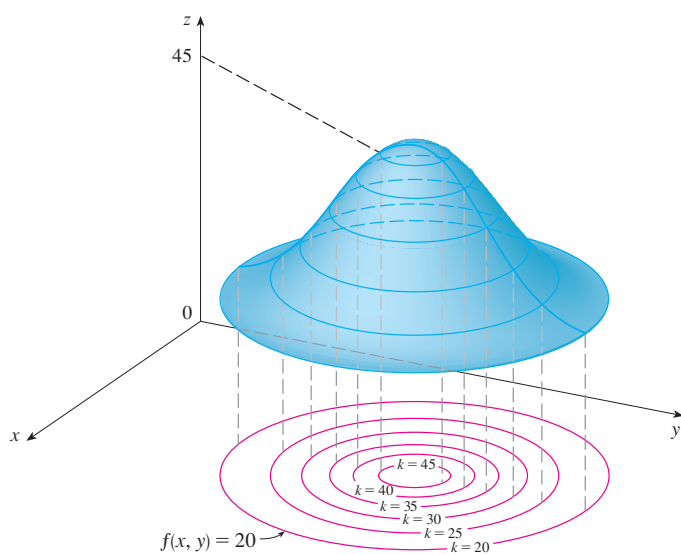


FIGURA 11

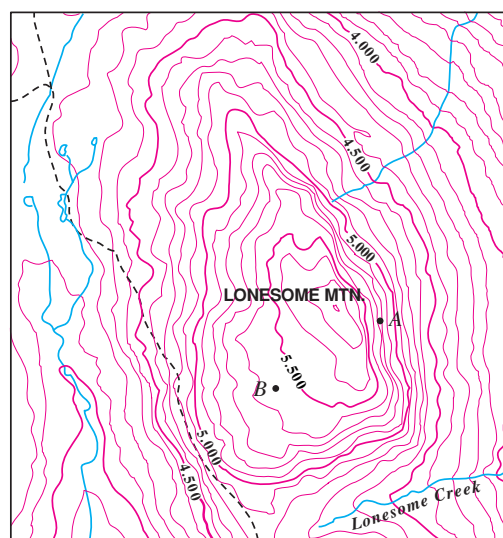


FIGURA 12

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k . Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k .

Você pode ver na Figura 11 a relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais. As curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy . Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras. Ela será um pouco mais achatada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Um exemplo comum de curvas de nível ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa da Figura 12. As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Se você andar sobre um desses contornos, nem descera nem subirá. Outro exemplo comum é a função temperatura apresentada no parágrafo inicial desta seção. Aqui as curvas de nível são chamadas **curvas isotérmicas** e ligam localidades que têm a mesma temperatura. A Figura 13 mostra um mapa de clima indicando as temperaturas médias do mês de janeiro. Isotérmicas são as curvas que separam as bandas destacadas.

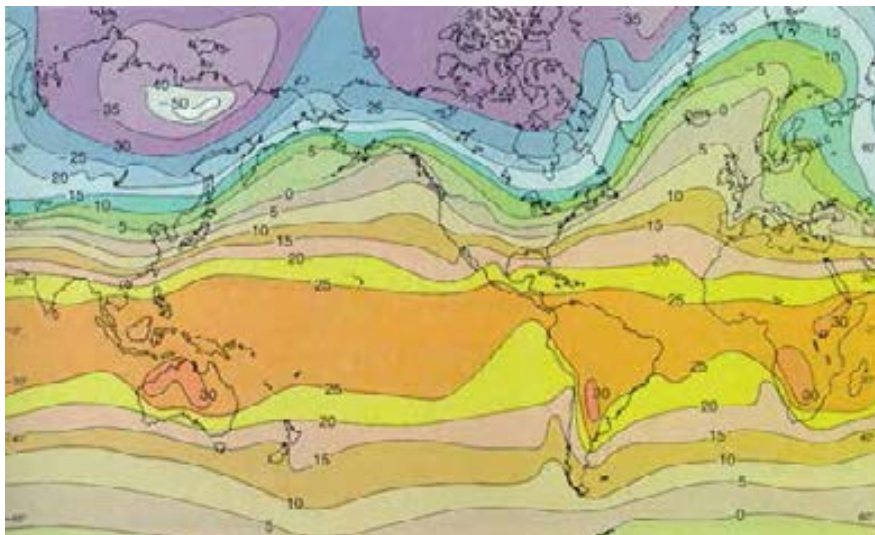


FIGURA 13

Temperaturas médias ao nível do mar no mês de janeiro, em graus Celsius

TARBUCK, EDWARD J.; TASA, DENNIS, *ATMOSPHERE, THE: AN INTRODUCTION TO METEOROLOGY*, 11. ed.
© 2010. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ

EXEMPLO 9 Um mapa de contorno para uma função f é mostrado na Figura 14. Use-o para estimar os valores de $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.

SOLUÇÃO O ponto $(1, 3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

Da mesma forma, estimamos que

$$f(4, 5) \approx 56$$

EXEMPLO 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou} \quad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Essa é uma família de retas com inclinação $-\frac{3}{2}$. As quatro curvas de nível particulares pedidas com $k = -6, 0, 6$ e 12 são $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ e $3x + 2y + 6 = 0$. Elas estão esboçadas na Figura 15. As curvas de nível são retas paralelas, igualmente espaçadas, porque o gráfico de f é um plano (veja a Figura 6).

EXEMPLO 11 Esboce as curvas de nível da função

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

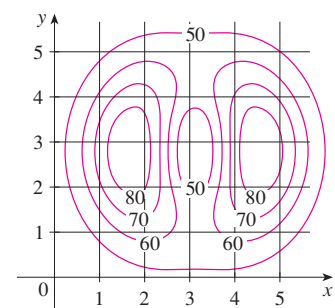


FIGURA 14

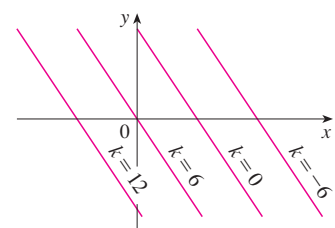


FIGURA 15

Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Essa é uma família de circunferências concêntricas com centro em $(0, 0)$ e raio $\sqrt{9 - k^2}$. Os casos $k = 0, 1, 2, 3$ são mostrados na Figura 16. Tente visualizar essas curvas de nível elevadas para formar uma superfície e compare com o gráfico de g (um hemisfério) na Figura 7. (Veja a TEC Visual 14.1A.)

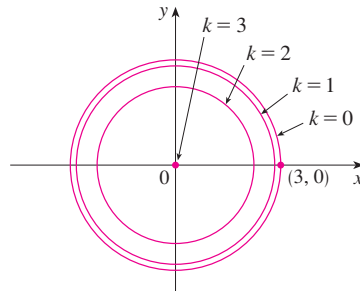


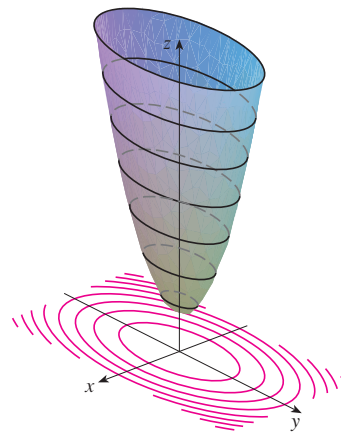
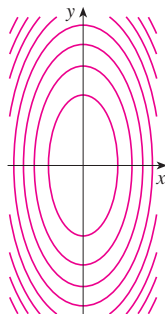
FIGURA 16
Mapa de contorno de
 $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

EXEMPLO 12 Esboce algumas curvas de nível da função $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

que, para $k > 1$, descrevem uma família de elipses com semieixos $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ e $\sqrt{k-1}$. A Figura 17(a) mostra um mapa de contorno de h desenhado por um computador. A Figura 17(b) apresenta essas curvas de nível elevadas para o gráfico de h (um parabolóide elíptico), onde elas se tornam os cortes horizontais. Vemos na Figura 17 como o gráfico de h é montado a partir de suas curvas de nível.



TEC Visual 14.1B demonstra a conexão entre as superfícies e seus mapas de contorno.

FIGURA 17

O gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ é formado levantando-se as curvas de nível.

(a) Mapa de contorno

(b) Cortes horizontais são curvas de nível elevadas

EXEMPLO 13 Trace as curvas de nível da função de produção de Cobb-Douglas do Exemplo 3.

SOLUÇÃO Na Figura 18 usamos o computador para desenhar um mapa de contorno da função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

As curvas de nível são rotuladas com o valor da produção P . Por exemplo, a curva de nível indicada com 140 mostra todos os valores da mão de obra L e do capital de investimento K que resultam em uma produção de $P = 140$. Vemos que, para um valor fixo de P , L aumenta e K decresce e vice-versa.

Para alguns propósitos, o mapa de contorno é mais útil que um gráfico. Certamente isto é verdadeiro no Exemplo 13. (Compare a Figura 18 com a Figura 8.) Isso também é verdadeiro na estimativa dos valores da função, como no Exemplo 9.

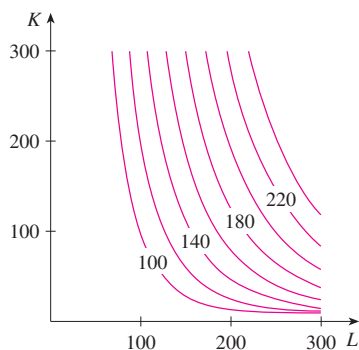


FIGURA 18

A Figura 19 apresenta algumas curvas de nível geradas por computador juntamente com os gráficos correspondentes. Observe que as curvas de nível na parte (c) da figura aparecem muito amontoadas perto da origem. Isso corresponde ao fato de o gráfico na parte (d) ser muito íngreme perto da origem.

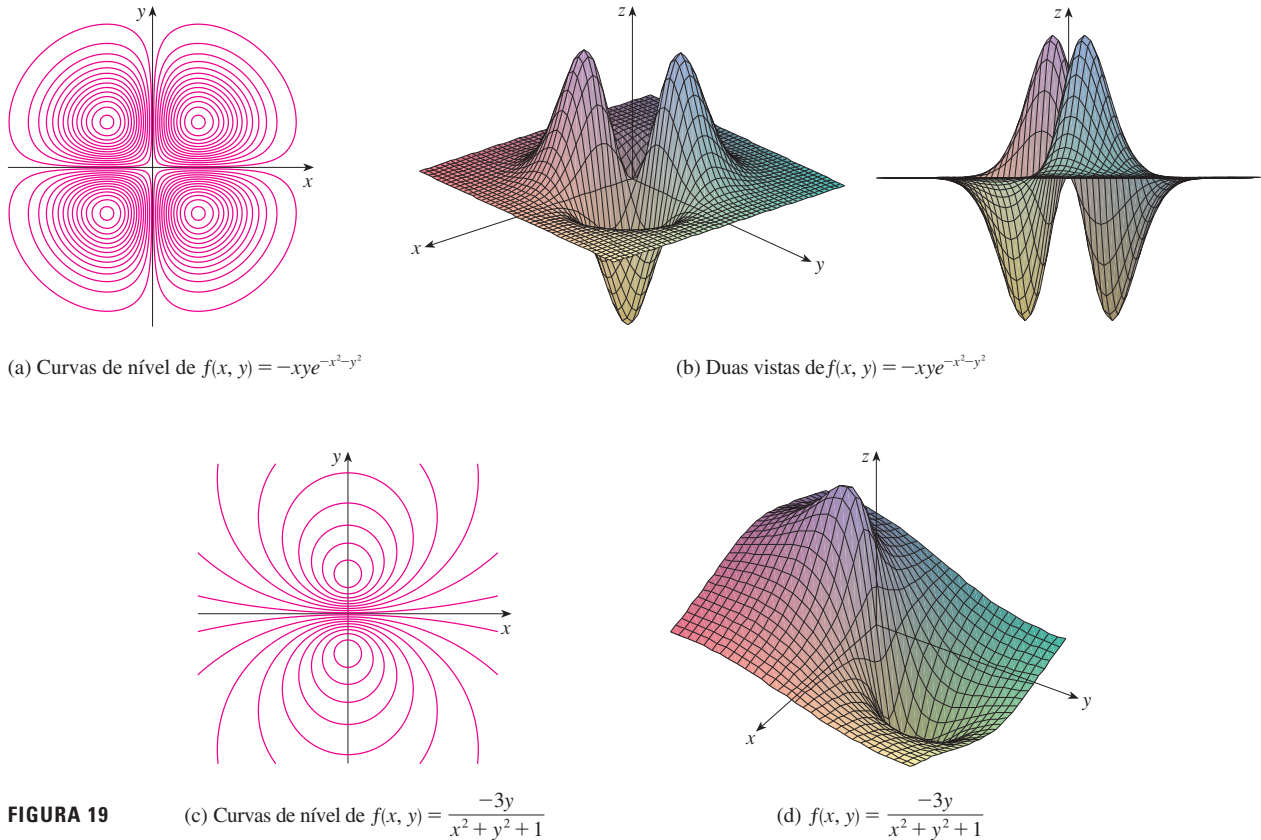


FIGURA 19

Funções de Três ou Mais Variáveis

Uma **função com três variáveis**, f , é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$. Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x e da longitude y do ponto e do tempo t , de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

EXEMPLO 14 Encontre o domínio de f se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

SOLUÇÃO A expressão para $f(x, y, z)$ é definida enquanto $z - y > 0$, assim, o domínio de f é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Esse é um **semiespaço** que consiste em todos pontos que estão acima do plano $z = y$.

É muito difícil visualizar uma função de f de três variáveis por seu gráfico, já que ele estaria em um espaço de quatro dimensões. No entanto, obtemos certo conhecimento de f ao examinar suas **superfícies de nível**, que são aquelas com equações $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante. Se o ponto (x, y, z) move-se ao longo de uma superfície de nível, o valor $f(x, y, z)$ permanece fixo.

EXEMPLO 15 Encontre as superfícies de nível da função.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

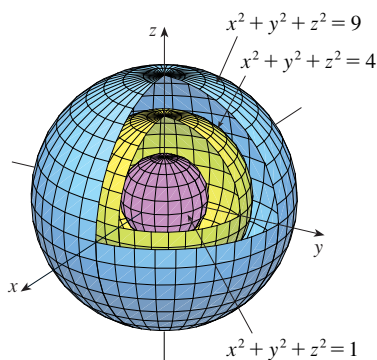


FIGURA 20

SOLUÇÃO As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geq 0$. Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio $\sqrt{k}$. (Veja a Figura 20.) Assim, enquanto (x, y, z) varia sobre qualquer esfera com centro O , o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo.

Funções com qualquer número de variáveis podem ser consideradas. Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a uma n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas essas n -uplas. Por exemplo, se uma companhia usa n ingredientes diferentes na fabricação de um produto alimentício, c_i é o custo por unidade do i -ésimo ingrediente e x_i unidades do ingrediente são usadas; então o custo total C dos ingredientes é uma função das n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$:

3

$$C = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

A função de f é de valor real cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por vezes, usamos uma notação vetorial para escrever estas funções de maneira mais compacta: Se $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, frequentemente escrevemos $f(\mathbf{x})$ no lugar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Com essa notação, podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto escalar dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$ em V_n .

Em vista da correspondência de um-para-um entre os pontos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e seus vetores posição $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ em V_n , temos três maneiras de ver uma função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \dots, x_n$
2. Como uma função de um único ponto n -dimensional $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
3. Como uma função de um único vetor n -dimensional $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista são úteis.

14.1 Exercícios

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica, T é a temperatura real, e v é a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
 - (a) Qual é o valor de $f(-15, 40)$? Qual é o seu significado?
 - (b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.
 - (c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T é verdade que $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.
 - (d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva seu comportamento.
 - (e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva seu comportamento.
2. O índice I de temperatura-umidade (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h , de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3

Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

		Umidade relativa(%)					
Temperatura real (°C)	h	20	30	40	50	60	70
	20	20	20	20	21	22	23
	25	25	25	26	28	30	32
	30	30	31	34	36	38	41
	35	36	39	42	45	48	51
	40	43	47	51	55	59	63

- (a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
- (b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
- (c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?
- (d) Quais são os significados das funções $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h .

3. Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor monetário de toda a produção em milhões de dólares) como uma função de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,47L^{0,65}K^{0,35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Encontre $P(120, 20)$ e interprete-o.

4. Verifique se, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isso também é verdade para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Um modelo para a área da superfície de um corpo humano é dado pela função

$$S = f(w, h) = 0,1091w^{0,425}h^{0,725}$$

onde w é o peso (em libras), h é a altura (em polegadas) e S é medida em pés quadrados.

- (a) Encontre $f(160, 70)$ e interprete-a.
(b) Qual é sua própria área de superfície?

6. O indicador de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:

$$W(T, v) = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v .

7. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em metros, são apresentados na Tabela 4.

- (a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?
(b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.
(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

8. Uma empresa fabrica caixas de papelão de três tamanhos: pequena, média e grande. O custo é de \$ 2,50 para fabricar uma

caixa pequena, \$ 4,00 para uma caixa média e \$ 4,50 para uma caixa grande. Os custos fixos são de \$ 8.000.

- (a) Expresse o custo da fabricação de x caixas pequenas, y caixas médias e z caixas grandes como uma função de três variáveis: $C = f(x, y, z)$.
(b) Encontre $f(3\,000, 5\,000, 4\,000)$ e interprete-a.
(c) Qual o domínio de f ?

9. Seja $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.

- (a) Calcule $g(2, -1)$.
(b) Determine o domínio de g .
(c) Determine a imagem de g .

10. Seja $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.

- (a) Calcule $F(3, 1)$.
(b) Determine e esboce o domínio de F .
(c) Determine a imagem de F .

11. Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

- (a) Calcule $f(1, 1, 1)$.
(b) Determine o domínio de f .

12. Seja $g(x, y, z) = x^2 y^2 z \sqrt{10 - x - y - z}$.

- (a) Calcule $g(1, 2, 3)$.
(b) Determine o domínio de g .

- 13–22 Determine e esboce o domínio da função.

13. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

18. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \arcsen(x^2 + y^2 - 2)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

22. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

- 23–31 Esboce o gráfico da função.

23. $f(x, y) = 1 + y$

24. $f(x, y) = 2 - x$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = e^{-y}$

27. $f(x, y) = y^2 + 1$

28. $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

29. $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

30. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

31. $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

32. Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$

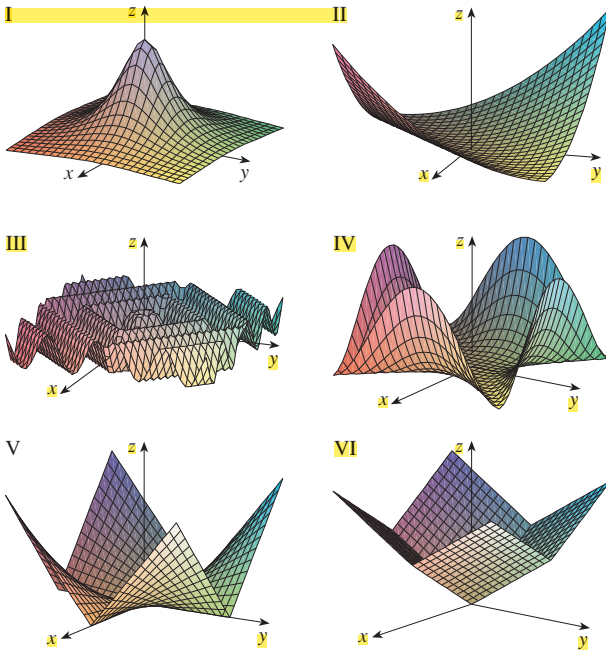
(b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$

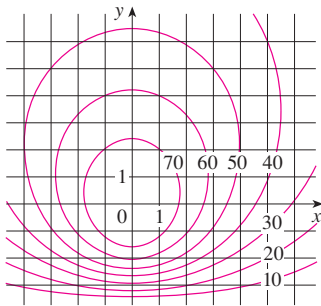
(d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

(e) $f(x, y) = (x - y)^2$

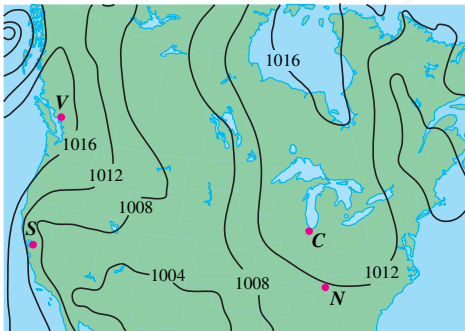
(f) $f(x, y) = \sen(|x| + |y|)$



33. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para estimar os valores de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

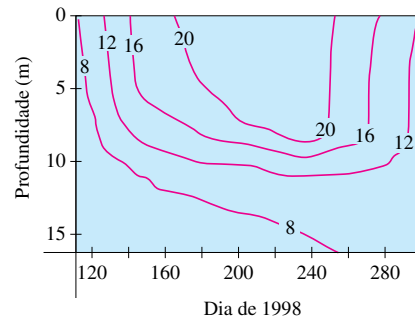


34. Um mapa de contorno da pressão atmosférica na América do Norte é mostrado em 12 de agosto de 2008. Nas curvas de nível (chamadas isobáricas) a pressão é indicada em milibares (mb).
(a) Estime a pressão em C (Chicago), N (Nashville), S (São Francisco) e V (Vancouver).
(b) Em quais desses lugares os ventos eram mais fortes?

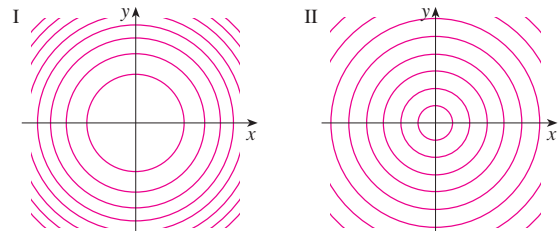


35. As curvas de nível (isotérmicas) são mostradas para a temperatura da água (em $^{\circ}\text{C}$) em Long Lake (Minnesota) em 1998 como

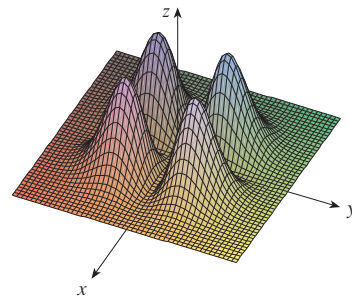
uma função de profundidade e da época do ano. Estime a temperatura do lago em 9 de junho (dia 160) em uma profundidade de 10 m e em 29 de junho (dia 180) em uma profundidade de 5 m.



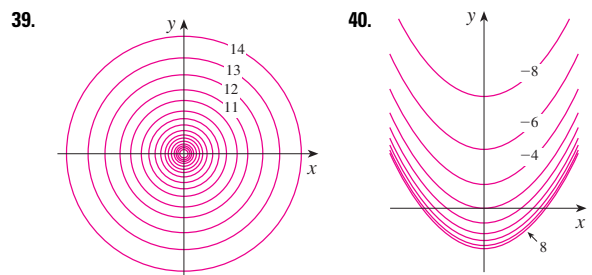
36. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um parabolóide. Qual é qual? Por quê?

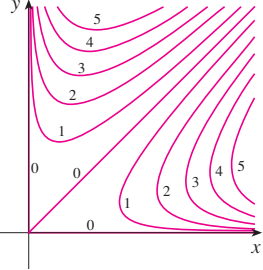
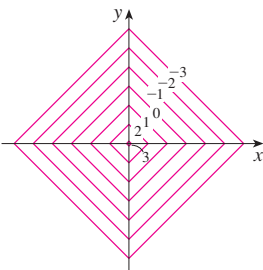


37. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? É perto de B?
38. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



39–42 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f .



41. 42. 

43–50 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

43. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

44. $f(x, y) = x^3 - y$

45. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

46. $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$

47. $f(x, y) = ye^x$

48. $f(x, y) = y \sec x$

49. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

50. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

51–52 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

51. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

52. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

53. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy , tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y) . As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma dessas curvas

têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

54. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico em um ponto (x, y) no plano xy , então as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque em todos os pontos dessa curva o potencial elétrico é o mesmo. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.



55–58 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

55. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

56. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

57. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\sin(x^2) + \cos(y^2))$

58. $f(x, y) = \cos x \cos y$

59–64 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A–F a seguir), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I–VI). Justifique sua escolha.

59. $z = \sin(xy)$

60. $z = e^x \cos y$

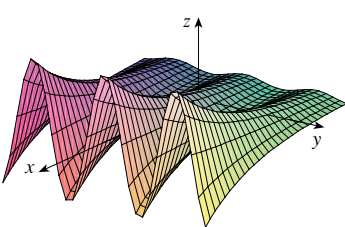
61. $z = \sin(x - y)$

62. $z = \sin x - \sin y$

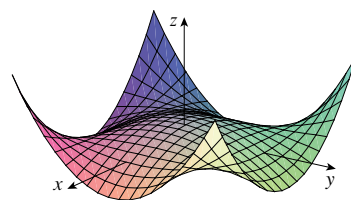
63. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

64. $z = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

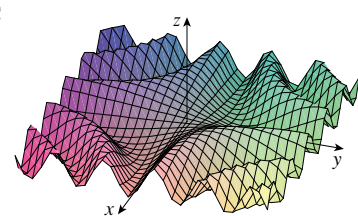
A



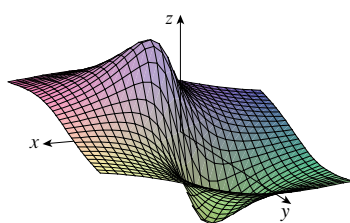
B



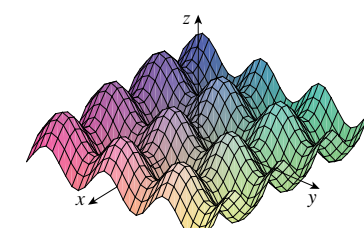
C



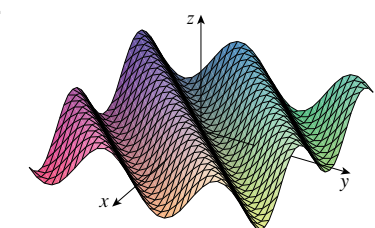
D



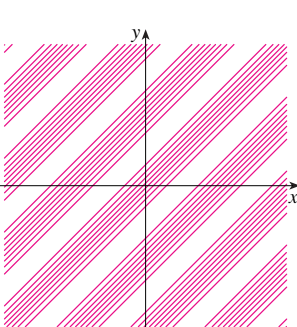
E



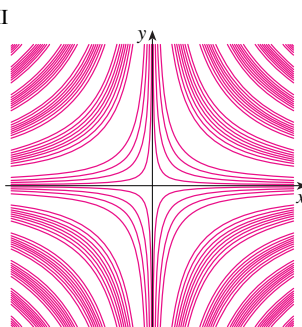
F



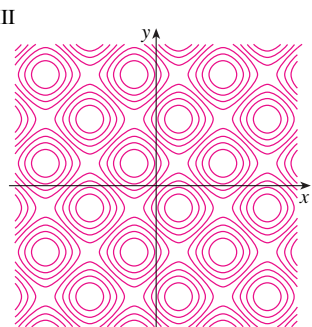
I

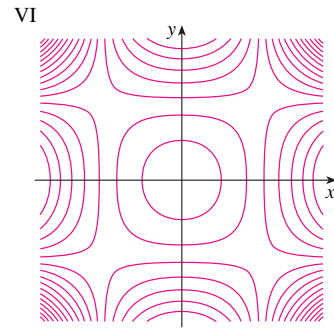
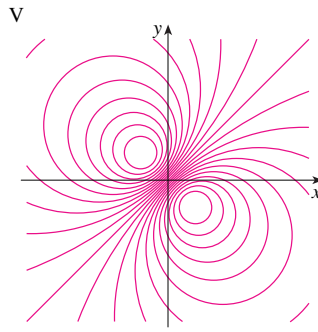
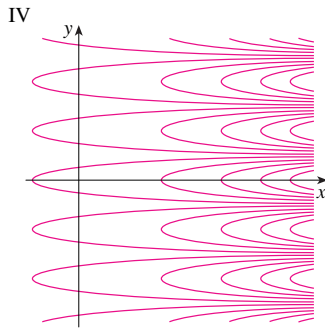


II



III





65–68 Descreva as superfícies de nível da função.

65. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

69–70 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f .

69. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$

(b) $g(x, y) = 2f(x, y)$

(c) $g(x, y) = -f(x, y)$

(d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

70. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$

(b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$

(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

71–72 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima aquela que apresente melhor os “picos e vales”. Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos “máximos locais”? E aos “mínimos locais”?

71. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

72. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

73–74 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

73. $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

74. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

75. Use um computador para investigar a família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. De que maneira a forma do gráfico depende de c ?

76. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b ?

77. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição de c para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrlica para outro.

78. Faça o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

e
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se $g(t)$ é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

a partir do gráfico de g ?

79. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}$$

(b) Se deixarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação no item (a) torna-se a equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Use a Tabela 2 (no Exemplo 3) para fazer a tabela dos valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos 1899–1922. Em seguida, use uma calculadora gráfica ou o computador para encontrar a linha de regressão dos quadrado mínimos pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$.

14.2 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (x, y) se aproxima da origem].

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, com precisão de três casas decimais, para pontos (x, y) próximos da origem. (Observe que nenhuma das funções está definida na origem.)

TABELA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
-0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
-0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

TABELA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
-0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
-0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0	-1,000	-1,000	-1,000		-1,000	-1,000	-1,000
0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

Parece que, quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$, os valores de $f(x, y)$ se aproximam de 1, ao passo que os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de valor algum. Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrever

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ não existe}$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que os valores de $f(x, y)$ se aproximam do número L à medida que o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de f . Em outras palavras, podemos fazer os valores de $f(x, y)$ tão próximos de L quanto quisermos tornando o ponto (x, y) suficientemente próximo do ponto (a, b) , mas não igual a (a, b) . Uma definição mais precisa é a seguinte:

1 Definição Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) . Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que se $(x, y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$ então $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = L \quad \text{e} \quad f(x, y) \rightarrow L \text{ as } (x, y) \rightarrow (a, b)$$

Observe que $|f(x, y) - L|$ corresponde à distância entre os números $f(x, y)$ e L , e $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ é a distância entre o ponto (x, y) e o ponto (a, b) . Assim, a Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a

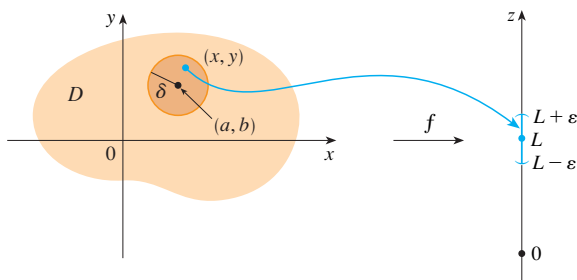


FIGURA 1

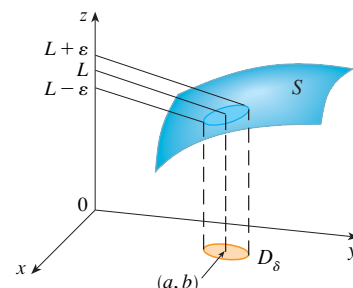


FIGURA 2

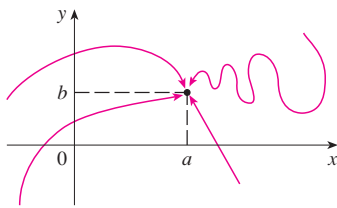


FIGURA 3

distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A Figura 1 ilustra a Definição 1 por meio de um diagrama de setas. Se qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ for dado em volta de L , poderemos encontrar um disco D_δ com o centro em (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que f mapeia todos os pontos em D_δ [exceto, possivelmente, (a, b)] no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Outra ilustração da Definição 1 é dada na Figura 2, onde a superfície S é o gráfico de f . Se $\varepsilon > 0$ for dado, podemos achar $\delta > 0$ tal que se (x, y) for restrito ao disco D_δ e $(x, y) \neq (a, b)$, então a parte correspondente de S fica entre os planos horizontais $z = L - \varepsilon$ e $z = L + \varepsilon$.

Para as funções de uma única variável, quando fazemos x tender a a , só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita. Lembremos a partir do Capítulo 2 que se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3), bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f .

A Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de (x, y) para (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A definição refere-se somente à *distância* entre (x, y) e (a, b) . Ela não se refere à direção da abordagem. Portanto, se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b) . Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tenha limites diferentes, segue então que $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ não existe.

Se $f(x, y) \rightarrow L_1$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \rightarrow L_2$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_2 , com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ não existe.

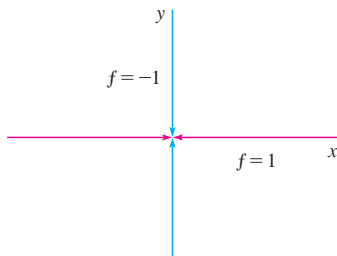


FIGURA 4

EXEMPLO 1 Mostre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primeiro vamos considerar $(0, 0)$ ao longo do eixo x . Então $y = 0$ dá $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Agora vamos nos aproximar ao longo do eixo y , colocando $x = 0$. Então

$$f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \text{ para todo } y \neq 0, \text{ portanto}$$

$$f(x, y) \rightarrow -1 \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

(veja a Figura 4). Como f tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe. (Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numérica no início desta seção.)

EXEMPLO 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Se $y = 0$, então $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto,

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, portanto

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Apesar de termos encontrado valores idênticos ao longo dos eixos, não podemos afirmar que o limite exista e seja 0. Vamos agora nos aproximar de $(0, 0)$ ao longo de outra reta; por exemplo, $y = x$. Para todo $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

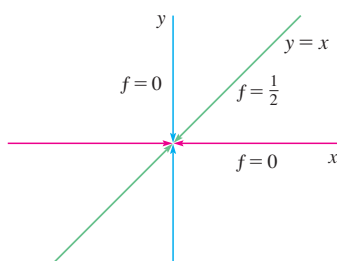


FIGURA 5

Portanto $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $y = x$

(Veja a Figura 5.) Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, podemos afirmar que o limite dado não existe.

A Figura 6 nos dá uma ideia do que acontece no Exemplo 2. A cumeeira que ocorre acima da reta $y = x$ corresponde ao fato de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos os pontos (x, y) dessa reta, exceto na origem.

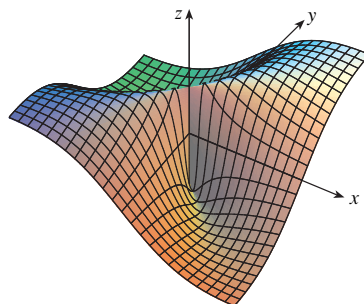


FIGURA 6

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, será que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Com a Solução do Exemplo 2 em mente, vamos tentar economizar tempo deixando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de qualquer reta não vertical através da origem. Tomemos $y = mx$, onde m é a inclinação da reta e

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Portanto $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $y = mx$

Logo, f tem o mesmo limite ao longo de qualquer reta não vertical que passe pela origem. Mas isso ainda não garante que o limite seja 0, pois, se tomarmos agora $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da parábola $x = y^2$, teremos

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Portanto $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $x = y^2$

Como caminhos diferentes levaram a resultados diferentes, o limite não existe.

Vamos agora olhar o caso em que o limite *existe*. Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções com duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites. As Propriedades do Limite listadas na Seção 2.3, no Volume I, podem ser estendidas para as funções de duas variáveis: o limite da soma é a soma dos limites; o limite do produto é o produto dos limites; e assim por diante. Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\boxed{2} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} x = a \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} y = b \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

EXEMPLO 4 Ache $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ se existir.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0. Isso não prova que o limite seja 0, mas o limite ao longo das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ também obtemos o limite 0, portanto começamos a suspeitar que o limite existe e é igual a 0.

A Figura 7 mostra o gráfico da função do Exemplo 3. Observe a cumeeira sobre a pa-

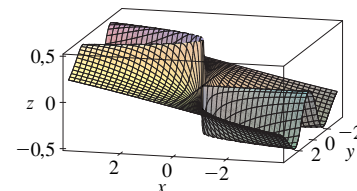


FIGURA 7

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{ou seja,} \quad \text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Mas $x^2 \leq x^2 + y^2$ uma vez que $y^2 \geq 0$, portanto $x^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ e, assim,

$$\boxed{3} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Dessa forma, se escolhermos $\delta = \varepsilon/3$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, teremos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Logo, pela Definição 1,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Outro modo de resolver o Exemplo 4 é pelo Teorema do Confronto em vez de usar a Definição 1. De $\boxed{2}$ segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3|y| = 0$$

e, portanto, a primeira desigualdade em $\boxed{3}$ mostra que o limite dado é 0.

Continuidade

Lembremo-nos de que o cálculo de limites de funções *contínuas* de uma única variável é fácil. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque, pela definição de função contínua, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

4 Definição Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D .

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia por uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará por uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios. Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

Uma **função polinomial de duas variáveis** (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma $cx^m y^n$, onde c é uma constante e m e n são números inteiros não negativos. Uma **função racional** é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

Os limites em $\boxed{2}$ mostram que as funções $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ e $h(x, y) = c$ são contínuas. Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções f , g e h por multiplicação e adição, segue que *todos os polinômios são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$* . Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUÇÃO Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

EXEMPLO 6 Onde a função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

SOLUÇÃO A função f é descontínua em $(0, 0)$, pois ela não está definida nesse ponto. Como f é uma função racional, ela é contínua em seu domínio, o que corresponde ao conjunto $D = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$.

EXEMPLO 7 Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aqui g está definida em $(0, 0)$, mas g ainda é descontínua porque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ não existe (veja o Exemplo 1).

EXEMPLO 8 Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sabemos que f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$, uma vez que ela é uma função racional definida nessa região. Do Exemplo 4, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Portanto f é contínua em $(0, 0)$ e, conseqüentemente, contínua em $\mathbb{R}^2$.

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua. De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de f , a função composta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ também é contínua.

EXEMPLO 9 Onde a função $h(x, y) = \arctg(y/x)$ é contínua?

SOLUÇÃO A função $f(x, y) = y/x$ é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta $x = 0$. A função $g(t) = \arctg t$ é contínua em toda parte. Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = \arctg(y/x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde $x = 0$. O desenho da Figura 9 mostra a ruptura existente no gráfico da função h acima do eixo y .

Funções de Três ou Mais Variáveis

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis. A notação

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de $f(x, y, z)$ se aproximam do número L à medida que o ponto (x, y, z) se aproxima do ponto (a, b, c) ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de f . Como a distância entre dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$ é dada por $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, podemos escrever a definição precisa da seguinte forma: para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } (x, y, z) \text{ está no domínio de } f \text{ e } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$$

$$\text{então } |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

A Figura 8 mostra o gráfico da função contínua do Exemplo 8.

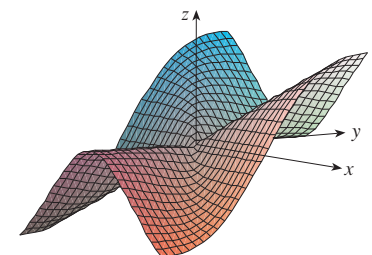


FIGURA 8

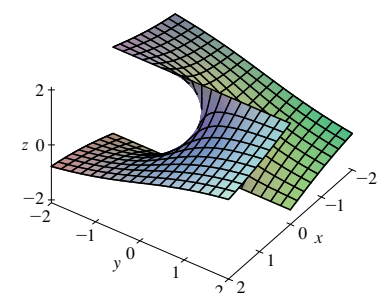


FIGURA 9

A função $h(x, y) = \arctg(y/x)$ é descontínua, onde $x = 0$.

A função f é **contínua** em (a, b, c) se

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é uma função racional em três variáveis, e portanto é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, exceto onde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Em outras palavras, é descontínua na esfera com o centro na origem e raio 1.

Se usarmos a notação vetorial introduzida no fim da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como a seguir.

5 Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$ e [5] é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, de modo que [5] se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$, e [5] é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Exercícios

1. Suponha que $\lim_{(x, y) \rightarrow (3, 1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
- A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
 - A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
 - O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3–4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \Rightarrow (0, 0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x, y) = \frac{x^2 y^3 + x^3 y^2 - 5}{2 - xy}$ 4. $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5–22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (5x^2 - x^2 y^2)$ 6. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -1)} e^{-xy} \cos(x + y)$

7. $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$ 8. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \ln \left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy} \right)$

9. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 - 4y^4}{x^2 + 2y^2}$

11. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$

13. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

15. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$

17. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1} - 1$

19. $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (\pi, \theta, 1)} e^{yz} \operatorname{tg}(xz)$

21. $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

10. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}$

12. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$

14. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

16. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2}$

18. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

20. $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

22. $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23–24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ 24. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25–26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t$, $f(x, y) = \frac{1 - xy}{1 + x^2 y^2}$

27–28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

28. $f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29–38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x, y) = \frac{xy}{1 + e^{x-y}}$

30. $F(x, y) = \cos \sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

32. $H(x, y) = \frac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x, y) = \tan^{-1}((x + y)^{-2})$

35. $f(x, y, z) = \arcsen(x^2 + y^2 + z^2)$

36. $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2} \ln z$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39–41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y) com $r \geq 0$, observe que $r \rightarrow 0^+$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.]

39. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

41. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que $f(x, y) \rightarrow 1$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para provar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $a < 4$.

(b) Independentemente do item (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.

(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [Dica: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas Parciais

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O *humidex* I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H . Desse modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

		Umidade relativa (%)								
Temperatura real (°C)	$T \backslash H$	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

TABELA 1

Índice de calor I como função da temperatura e umidade