ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática I

LCD – Licenciatura em Ciência de Dados

25/06/2021 – Parte I (75%)

Tipo de Prova: Exame final (2ª Época): Parte I + Parte II — Duração máxima: 3 H
Frequência: Parte I — Duração máxima: 2 H

Nome Completo .....
(em maiúsculas)

Proposta de Resolução

Número ..... Turma .....

- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tiram dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

Reservado para cotações.

1. a)
   b)
   c)
2. a)
   b)
3.
4. a)
   b)
   c)
5. a)
   b)
   c)
6. a)
   b)

(3.0 valores) 1. Determine, caso existam, os limites das seguintes sucessões reais. Caso os limites não existam, justifique.

(1.0) a) $u_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

(1.0) b) $v_n = \dfrac{n-1}{n} \times (1 + \cos(n\pi))$

(1.0) c) $w_n = \dfrac{2^n}{(n-1)!}$

1. a) $u_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \dfrac{n^2-1}{n^2} = 1 - \dfrac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - 0 = 1$ //

1. b) $v_n = \dfrac{n-1}{n} \times (1 + \cos(n\pi))$

é o produto de uma sucessão limitada e crescente, $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, com uma sucessão limitada e alternante, $(1 + \cos(n\pi))$.

Sendo a primeira sucessão monótona crescente e limitada, ela será necessariamente convergente, tendo-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1.$$

A segunda sucessão, no entanto, apenas toma 2 valores alternadamente:

$$(1 + \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ for impar} \\ 2 & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Assim, se compusermos v_n com a sucessão dos números ímpares $a_n = 2n - 1$ teremos

$$(v \circ a)_n = v(a(n)) = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \left(1 + \cos\left((2n-1)\pi\right)\right) = \frac{2(n-1)}{2n-1} \times 0 = 0$$

donde vem $\lim_{n\to\infty} (v \circ a)_n = 0$.

Por outro lado, se compusermos v_n com a sucessão dos números pares $b_n = 2n$, $(n=1,2,3,\ldots)$ obtemos

$$(v \circ b)_n = v(b(n)) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \left(1 + \underbrace{\cos(2n\pi)}_{1}\right) = \frac{2n-1}{2n} \cdot 2 = \frac{2n-1}{n}$$

cujo limite é $$\lim_{n\to\infty} (v \circ b)_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

ou seja, diferente de zero.

Uma vez que as duas subsucessões consideradas não têm o mesmo limite, concluímos que a sucessão v_n não tem limite, ou seja, é divergente. //

1.c) $$w_n = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Este é o tipo de sucessão idealmente adaptado para se usar o resultado que relaciona o limite de w_n com o limite de $\frac{w_{n+1}}{w_n}$, porque ao tomar o quociente há muitos termos que cancelam:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n!}}{\frac{2^n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \times 2^n}{2^n} \frac{(n-1)!}{n \times (n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Como o valor deste limite é < 1, então podemos concluir que w_n é um infinitésimo, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0 \;//$$

(2.0 valores) 2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{x\,\exp(x^2)} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(0.5) a) Indique, justificando, se f tem paridade definida e, em caso afirmativo, especifique se a função é par ou ímpar.

(1.5) b) Estude a função f quanto à continuidade no ponto $x = 0$.

2.a) Sim f é uma função ímpar uma vez que satisfaz

$$f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{-x\,\exp((-x)^2)} = \frac{(-\sin(x))^2}{-x\,\exp(x^2)} = -\frac{\sin^2 x}{x\,\exp(x^2)} = -f(x) \quad \text{se } x \neq 0.$$

No caso $x = 0$ a relação $f(-x) = -f(x)$ também é (trivialmente) satisfeita pois tem-se $f(-0) = f(0) = 0 = -f(0)$. //

2.b) Para a função ser contínua no ponto $x = 0$ tem de se verificar

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Uma vez que a função é ímpar, basta calcular um dos limites — por exemplo $f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ — e usar a relação $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x\,\exp(x^2)} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x}{e^{x^2}}\right)}_{=0} \times \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{=1} = 0$$

Sendo assim, os dois limites existem e são iguais ao valor da função no ponto: $f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 0$.

Logo f é contínua. //

(2.5 valores) 3. Escreva a fórmula de Taylor até aos termos de 2ª ordem, em torno do ponto $\frac{\pi}{2}$, para a função $f(x) = \text{cosec}\,(x)$.

3.

$$f(x) = \text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{(\cos(x))'\sin^2(x) - \cos(x)(\sin^2(x))'}{(\sin^2(x))^2} =$$

$$= -\frac{-\sin^3(x) - 2\cos^2(x)\sin(x)}{\sin^4(x)} = +\frac{\sin^2(x) + 2\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad , \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \quad , \quad f''(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = f(\tfrac{\pi}{2}) + f'(\tfrac{\pi}{2})\cdot(x-\tfrac{\pi}{2}) + f''(\tfrac{\pi}{2})\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + o(x-\tfrac{\pi}{2})^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-\tfrac{\pi}{2})^2 + o(x-\tfrac{\pi}{2})^2$$

(5.5 valores) 4. Determine a família das primitivas de cada uma das seguintes funções reais:

(1.5) a) $\sqrt{(1-2x)}$

(1.5) b) $\dfrac{1}{x(1+\ln(x))}$

(2.5) c) $x\,\mathrm{atan}^2(x)$

4.a) Esta é uma primitiva imediata:

$$\int \sqrt{(1-2x)}\,dx = \int (1-2x)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\frac{(1-2x)^{3/2}}{-2} + C = -\frac{1}{3}(1-2x)^{3/2} + C$$

4.b) Esta primitiva pode ser facilmente obtida pelo método da substituição:

$$t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t = dx = e^t\,dt$$

$$\int \frac{1}{x(1+\ln(x))}\,dx = \int \frac{1}{e^t(1+t)}\,e^t\,dt = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= \ln|1+t| + C = \ln|1+\ln(x)| + C.$$

4.c) Esta primitiva ajusta-se bem ao método de primitivação por partes:

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \underbrace{x}_{u'}\,\underbrace{\arctan^2(x)}_{v}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u}\cdot\underbrace{\arctan^2(x)}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{x}}_{u}\cdot\underbrace{\frac{2\arctan(x)}{1+x^2}\,dx}_{v'}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) - \int \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\arctan(x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) - \int \underbrace{\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)}_{u'}\underbrace{\arctan(x)}_{v}\,dx$$

Agora primitivamos novamente por partes, tomando

$u'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow u(x) = x - \arctan(x)$

e $v(x) = \arctan(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int x \arctan^2(x)\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) + \int \left(x - \arctan(x)\right)\cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx - \left(x - \arctan(x)\right)\cdot \frac{\arctan(x)}{1}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) + \int \frac{x}{1+x^2}\, dx - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot \arctan(x)\, dx$$

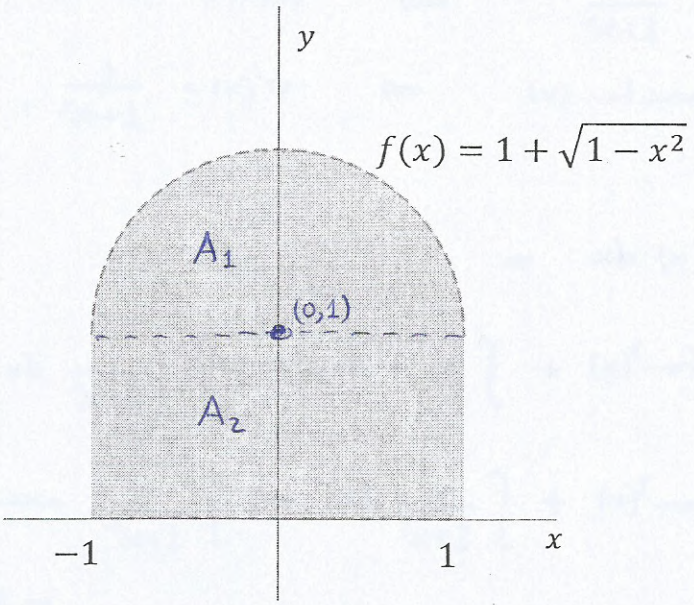
$$- x\arctan(x) + \arctan^2(x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{2}\arctan^2(x) - x\arctan(x)$$

$$+ \arctan^2(x) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+x^2)\arctan^2(x) + \ln|1+x^2| - 2x\arctan(x)\right] + C$$

(5.0 valores) 5. Considere a região sombreada da figura seguinte, delimitada superiormente pela semi-circunferência a tracejado:



(1.0) a) Calcule a área dessa região, usando apenas argumentos geométricos.
(1.5) b) Escreva uma expressão integral que lhe permita calcular a área da região sobreada.
(2.5) c) Calcule de novo a área referida, resolvendo agora o integral indicado na alínea anterior. (Sugestão: considere a substituição $x = \sin t$)

5.a) Esta região é a união de um semicírculo de raio 1 (centrado no ponto $(0, 1)$) com um retângulo:

$$A_1 = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$A_2 = 2 \times 1 = 2$$

$$A_{total} = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{2} + 2.$$

5.b)

$$A_{total} = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right) dx$$

5.c)

$$A_{total} = \int_{-1}^{1} dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$

$$= \Big[x\Big]_{-1}^{+1} + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt$$

$$= \big(1-(-1)\big) + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

$$= 2 + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 t\, dt}_{=A_1}$$

, este integral pode ser calculado de várias maneiras

▷ Analiticamente, usando integração por partes:

$$A_1 = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 t\, dt = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \underbrace{\cos t}_{u'} \cdot \underbrace{\cos t}_{v}\, dt = \Big[\sin t \cdot \cos t\Big]_{-\pi/2}^{+\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \underbrace{\sin t}_{u} \cdot \underbrace{(-\sin t)}_{v'} dt$$

$$= 0 + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin t \cdot \sin t\, dt$$

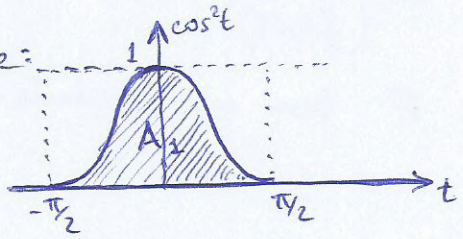
$$= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1-\cos^2 t)\, dt = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dt - \underbrace{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 t\, dt}_{=A_1}$$

$$= \Big[t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} - A_1 = \pi - A_1$$

Ou seja, $A_1 = \pi - A_1$

$$\Leftrightarrow \quad 2A_1 = \pi \quad \Longrightarrow \quad A_1 = \pi/2 \;//$$

▷ Graficamente:



vemos que a área abaixo da curva do gráfico de $\cos^2 t$ é exactamente metade da área do retângulo desenhado a tracejado, logo $A_1 = \frac{\pi \times 1}{2} = \pi/2$ //

De qualquer modo,

$$A_{total} = 2 + \pi/2 \;.\; //$$

(2.0 valores) 6. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável, estritamente crescente, e seja $F: [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^{x^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t} f(t)}}_{= g(t)} dt$$

(1.0) a) Calcule $F'(x)$.

(1.0) b) Estude a concavidade da função $F(x)$.

6.a) $F'(x) = (x^2)' \cdot g(x^2) = 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2} f(x^2)} = \frac{2}{f(x^2)}$

6.b) Para analisar a concavidade precisamos de calcular a segunda derivada de F:

$$F''(x) = \left(\frac{2}{f(x^2)}\right)' = -2 \frac{\left(f(x^2)\right)'}{\left(f(x^2)\right)^2} = \frac{-2 \times (2x f'(x^2))}{\left(f(x^2)\right)^2}$$

$$= -\frac{4x f'(x^2)}{\left(f(x^2)\right)^2}$$

Sabemos que f é diferenciável e estritamente crescente, logo $f'(x^2) > 0$ (mesmo sendo avaliada em x^2, em vez de em x).

Sabemos também que o domínio de F é $[1, +\infty)$ logo $x > 0$. Assim, a expressão que obtivemos para $F''(x)$ é estritamente negativa

$$F''(x) = -\frac{4 \cdot x \cdot f'(x^2)}{\left(f(x^2)\right)^2} < 0$$

Ou seja, o gráfico de F tem concavidade voltada para baixo.