ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática I

LCD – Licenciatura em Ciência de Dados

05/01/2021 – Parte I (75%)

Tipo de Prova: Exame final (1ª Época): Parte I + Parte II — Duração máxima: 3 H
Frequência: Parte I — Duração máxima: 2 H

Nome Completo ....
(em maiúsculas)

Proposta de Resolução

Número .... Turma ....

- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tiram dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

Reservado para cotações.

1. a)	5. a)
b)	b)
	c)
2.	6. a)
	b)
3.	c)
	d)
4.	7. a)
	b)

(2.0 valores) 1. Calcule, caso exista, o limite de cada uma das seguintes sucessões reais:

(1.0) a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

(1.0) b) $v_n = \dfrac{(3n+1)^4 + n^2}{n^4+2}$

1. a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ é o produto de um infinitésimo, $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$, com uma **sucessão** alternante **limitada**, $(-1)^n$. Com efeito tem-se $|(-1)^n| = 1 \leq 1$.

Assim, pelo teorema T 1.7, u_n é também um infinitésimo. Logo.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Demonstração de que $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ é um infinitésimo:

$$\left|\frac{1}{1+\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \iff |1+\sqrt{n}| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \iff n > \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2$$

Seja então $p \equiv \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2 \right\rceil$, onde $\lceil x \rceil$ indica a **função tecto**, ou seja, o menor inteiro maior ou igual a x.

Nesse caso, $\forall n > p \ \left(\geq \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\right)$ teremos $\left|\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$

e portanto $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1. b) Expandindo o numerador, e depois dividindo por n^4 tanto o numerador como o denominador, obtemos

$$v_n = \frac{(3n+1)^4 + n^2}{n^4+2} = \frac{81n^4 + 4\times(3n)^3 + 6\times(3n)^2 + 4\times(3n) + 1 + n^2}{n^4+2}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \; \frac{81n^4 + 108n^3 + 55n^2 + 12n + 1}{n^4+2}$$

$$= \frac{81 + \frac{108}{n} + \frac{55}{n^2} + \frac{12}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{81+0+0+0+0}{1+0} = 81$$

Donde

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 81.$$

(1.5 valores) $\boxed{2.}$ Use o conceito de subsucessão para mostrar que a sucessão $x_n = n^{(-1)^n}$ é divergente.

$\boxed{2.}$ $x_n = n^{(-1)^n}$

Consideremos a subsucessão dos termos ímpares, $(x \circ a)_n$, onde

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

e a subsucessão dos termos pares, $(x \circ b)_n$, onde

$$b_n = 2 + 2(n-1) = 2n = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Temos então:

$$(x \circ a)_n = x(a(n)) = (a(n))^{(-1)^{a(n)}} = (a(n))^{-1} = \frac{1}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$(x \circ b)_n = x(b(n)) = (b(n))^{(-1)^{b(n)}} = (b(n))^{+1} = 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Uma vez que as duas subsucessões têm limites distintos, a sucessão x_n não pode ser convergente (teorema T1.3). Logo, será divergente.

(1.5 valores) 3. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x+2)}{2} & \text{se } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade no ponto $x = 0$.

3. Para analisar a continuidade da função f no ponto $x=0$ basta comparar os limites à esquerda e à direita, nesse mesmo ponto, com o valor da função no ponto, $f(0)$:

- Pela definição de $f(x)$ temos $f(0) = \dfrac{0(0+2)}{2} = 0$.

- O limite à esquerda é

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+2)}{2} = 0$$

- O limite à direita é

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\log}\ (1+x^2)}{x} \qquad (\text{indeterminação } \tfrac{0}{0})$$

Para levantar a indeterminação calculamos o limite de $\dfrac{[\ln(1+x^2)]'}{[x]'}$. Se existir, será igual ao limite que pretendemos calcular (teorema T2.15 - regra de Cauchy).

$$\lim_{x \to 0} \frac{[\ln(1+x^2)]'}{[x]'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0 \quad (= f(0^+))$$

Vemos então que $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$ e portanto concluímos que f é contínua no ponto $x=0$. //

(2.5 valores) $\boxed{4.}$ Escreva a fórmula de Maclaurin até aos termos de 2ª ordem para a função $f(x) = e^{-x}\cos x$.

$\boxed{4.}$ Primeiro calculamos as duas primeiras derivadas da função:

$$f'(x) = [e^{-x}\cos x]' = (e^{-x})'\cos x + e^{-x}(\cos x)' =$$
$$= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x =$$
$$= -e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

$$f''(x) = [-e^{-x}(\cos x + \sin x)]' = -(e^{-x})'(\cos x + \sin x) - e^{-x}(\cos x + \sin x)'$$
$$= e^{-x}(\cancel{\cos x} + \sin x) - e^{-x}(-\sin x + \cancel{\cos x})$$
$$= 2e^{-x}\sin x$$

Para obter a fórmula de Maclaurin temos de avaliar estas funções no ponto $x = 0$:

$$f(0) = e^{-0}\cos 0 = 1$$
$$f'(0) = -e^{-0}(\cos 0 + \sin 0) = -1$$
$$f''(0) = 2e^{-0}\sin 0 = 0$$

Assim, a fórmula de Maclaurin de 2ª ordem é dada por

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + r_2(x) \quad , \quad r_2(x) = o(x^2)$$
$$= 1 - x + o(x^2)$$

Poderíamos igualmente escrever

$$f(x) \simeq 1 - x.$$

(5.5 valores) 5. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções reais:

(1.5) a) $3\cos(x)e^{-\sin(x)}$

(2.0) b) $\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)-4}$

(2.0) c) $x\ln^2(x)$

5. a) Esta é uma primitiva imediata porque a derivada do expoente, $(-\sin x)' = -\cos x$, é proporcional ao fator multiplicativo, $3\cos x$:

$$\int 3\cos x \, e^{-\sin x}\,dx = -3\int(-\cos x)\cdot e^{-\sin x}\,dx =$$

$$= -3\int u'(x)\,e^{u(x)}\,dx = -3\,e^{u(x)} = -3\,e^{-\sin x} \quad \text{onde } u(x) = -\sin x.$$

(também se poderia resolver facilmente por substituição $t = -\sin x$)

5. b)

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4}\,dx \qquad \text{Substituição: } t = \sin x \implies dt = \cos x\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-4} = \int \frac{dt}{(t-2)(t+2)}$$

A função integranda é racional (própria) e portanto podemos decompô-la em frações parciais:

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)} = \frac{A_1}{t-2} + \frac{A_2}{t+2} = \frac{A_1(t+2)+A_2(t-2)}{(t-2)(t+2)} = \frac{t\overbrace{(A_1+A_2)}^{=0} + 2\overbrace{(A_1-A_2)}^{=1}}{(t-2)(t+2)}$$

$$\implies A_1 = \tfrac{1}{4}, \quad A_2 = -\tfrac{1}{4}$$

Logo

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4}\,dx = \int\left(\frac{1/4}{t-2} - \frac{1/4}{t+2}\right)dt = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-2} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t-2| - \frac{1}{4}\ln|t+2| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 2}{\sin x + 2}\right| \quad //$$

"desfazendo" a substituição

$\boxed{5.c)}$ Esta primitiva calcula-se facilmente por partes:

$$\int \underbrace{x}_{v'} \cdot \underbrace{\ln^2(x)}_{u}\, dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \cdot \underbrace{\ln^2(x)}_{u} - \int \underbrace{\frac{\cancel{2}\ln x}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\cancel{2}}}_{v}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int x \cdot \ln x \, dx$$

Recorrendo novamente à primitivação por partes:

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\, dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln x\right) + \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln x\right) + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln x + \frac{1}{2}\right) \quad //$$

Podemos confirmar que a nossa resposta está de facto correta se, ao derivarmos, obtivermos a função integranda original:

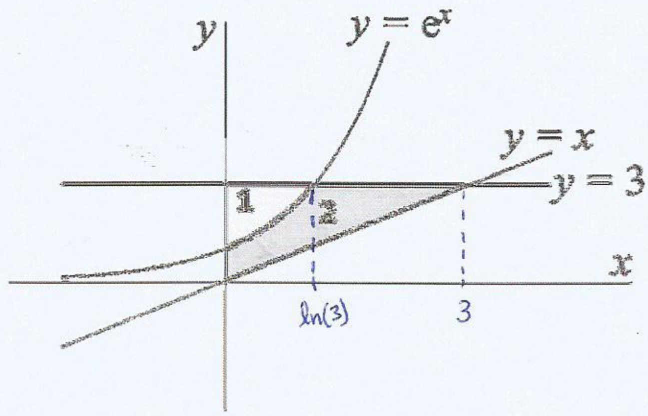
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln x + \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \left(\ln^2(x) - \ln x + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\cdot\left(\ln^2(x) - \ln x + \frac{1}{2}\right)'$$

$$= x\cdot\left(\ln^2(x) - \ln x + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\left(2\,\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= x\ln^2(x) - \cancel{x\ln x} + \cancel{\frac{x}{2}} + \cancel{x\ln x} - \cancel{\frac{x}{2}}$$

$$= x\cdot\ln^2(x) \quad \checkmark$$

(5.0 valores) 6. No gráfico seguinte estão identificadas duas regiões planas com números 1 e 2, assim como as equações das linhas que as delimitam.



(1.0) a) Escreva uma expressão integral que lhe permita calcular a área da região 1.
(1.0) b) Faça o mesmo que na alínea anterior, agora em relação à região 2.
(2.0) c) Calcule separadamente as áreas das duas regiões indicadas.
(1.0) d) Some os valores encontrados na alínea anterior, e comente o resultado obtido.

6.a) Em primeiro lugar temos que determinar a intersecção de $y = e^x$ com $y=3$:

$$y = e^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \ln(3)$$

Assim, $$A_1 = \int_0^{\ln(3)} (3 - e^x)\, dx$$

6.b) Dividindo a região 2 em duas partes – de $x=0$ até $x=\ln(3)$, e de $x=\ln(3)$ até $x=3$ – temos

$$A_2 = \int_0^{\ln(3)} (e^x - x)\, dx + \int_{\ln(3)}^{3} (3-x)\, dx$$

$\boxed{6.c)}$

$$A_1 = \int_0^{\ln(3)} (3 - e^x)\, dx = \left[3x - e^x \right]_0^{\ln(3)} =$$

$$= \left(3\ln(3) - e^{\ln(3)} \right) - \left(3 \times 0 - e^0 \right) =$$

$$= 3\ln(3) - 3 + 1 = 3\ln(3) - 2 \quad //$$

$$A_2 = \int_0^{\ln(3)} (e^x - x)\, dx + \int_{\ln(3)}^{3} (3 - x)\, dx =$$

$$= \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\ln(3)} + \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_{\ln(3)}^{3} =$$

$$= \left(e^{\ln(3)} - \cancel{\frac{\ln(3)^2}{2}} \right) - \left(e^0 - \frac{0^2}{2} \right) + \left(3 \times 3 - \frac{3^2}{2} \right) - \left(3 \times \ln(3) - \cancel{\frac{\ln(3)^2}{2}} \right) =$$

$$= 3 - 1 + 9 - \frac{9}{2} - 3\ln(3) =$$

$$= 2 + \frac{9}{2} - 3\ln(3) =$$

$$= \frac{13}{2} - 3\ln(3) \quad //$$

$\boxed{6.d)}$

$$A_1 + A_2 = \left(\cancel{3\ln(3)} - 2 \right) + \left(\frac{13}{2} - \cancel{3\ln(3)} \right) = \frac{13}{2} - 2 = \frac{9}{2} \quad //$$

Este valor representa a área do triângulo inscrito nas retas

$y = 3$, $y = x$ e $x = 0$:

$$A_\Delta = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} \quad //$$

(2.0 valores) 7. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $f(x) < 0$ se $x > 0$, e seja $F\colon [-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_{-1}^{x^2} \underbrace{t\, f(t)}_{= g(t)}\, \mathrm{dt}$$

(1.0) a) Calcule $F'(x)$.

(1.0) b) Mostre que $F(x)$ tem um único ponto de estacionaridade, e determine a sua natureza.

7. a) Pelo teorema T2.32 (ou equivalentemente usando a derivação da função composta e o 1° teorema fundamental do cálculo integral) temos

$$F'(x) = g(x^2) \cdot (x^2)' = x^2 \cdot f(x^2) \cdot 2x = 2x^3 f(x^2).$$

7. b) Um ponto de estacionaridade é, por definição, um ponto x satisfazendo $F'(x) = 0$.

Uma vez que sabemos que f é estritamente negativa para todos os valores positivos da sua variável, concluímos que

$$f(x^2) < 0 \qquad \forall\, x \neq 0.$$

(Para $x = 0$ poderemos ter $f(0) < 0$ ou $f(0) = 0$, mas nunca $f(0) > 0$, pois isso contrariaria a hipótese de continuidade da função f.)

Sendo assim

$$F'(x) = 2x^3 f(x^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = 0.$$

Este é o único ponto de estacionaridade de $F(x)$.

Dado que $F'(x) > 0$ $\forall\, x < 0$ e $F'(x) < 0$ $\forall\, x > 0$ concluímos que $x = 0$ é um máximo (global) da função F.