ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática I

LCD – Licenciatura em Ciência de Dados

25/06/2021 – Parte I (75%)

Tipo de Prova: Exame final (2ª Época): Parte I + Parte II — Duração máxima: 3 H
Frequência: Parte I — Duração máxima: 2 H

Nome Completo ....
(em maiúsculas)

Número .... Turma ....

- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tiram dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

Reservado para cotações.

1.	a)	4.	a)
	b)		b)
	c)		c)
		5.	a)
2.	a)		b)
	b)		c)
3.		6.	a)
			b)

(3.0 valores) 1. Determine, caso existam, os limites das seguintes sucessões reais. Caso os limites não existam, justifique.

(1.0) a) $u_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

(1.0) b) $v_n = \dfrac{n-1}{n} \times (1 + \cos(n\pi))$

(1.0) c) $w_n = \dfrac{2^n}{(n-1)!}$

(2.0 valores) 2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{x\exp(x^2)} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(0.5) a) Indique, justificando, se f tem paridade definida e, em caso afirmativo, especifique se a função é par ou ímpar.

(1.5) b) Estude a função f quanto à continuidade no ponto $x = 0$.

(2.5 valores) 3. Escreva a fórmula de Taylor até aos termos de 2ª ordem, em torno do ponto $\frac{\pi}{2}$, para a função $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$.

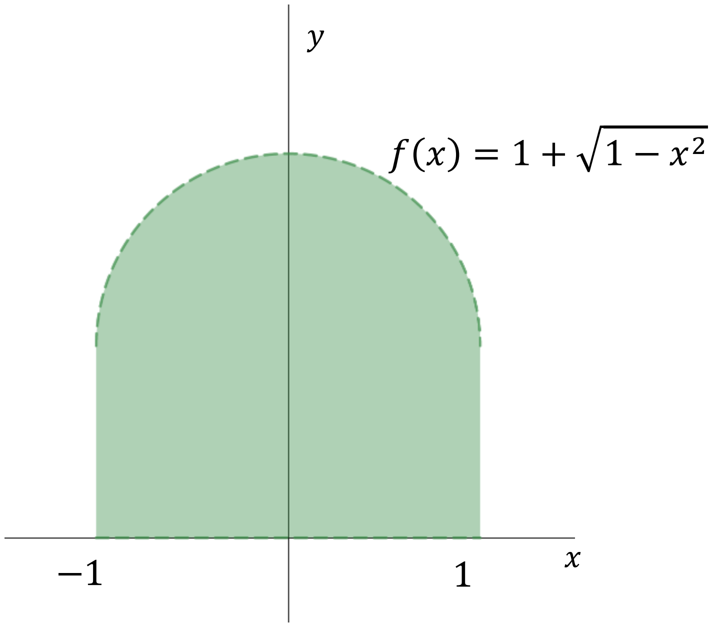
(5.5 valores) 4. Determine a família das primitivas de cada uma das seguintes funções reais:

(1.5) a) $\sqrt{(1-2x)}$

(1.5) b) $\dfrac{1}{x(1+\ln(x))}$

(2.5) c) $x\ \mathrm{atan}^2(x)$

(5.0 valores) 5. Considere a região sombreada da figura seguinte, delimitada superiormente pela semi-circunferência a tracejado:



(1.0) a) Calcule a área dessa região, usando apenas argumentos geométricos.

(1.5) b) Escreva uma expressão integral que lhe permita calcular a área da região sobreada.

(2.5) c) Calcule de novo a área referida, resolvendo agora o integral indicado na alínea anterior. (Sugestão: considere a substituição $x = \sin t$)

(2.0 valores) 6. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável, estritamente crescente, e seja $F: [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} f(t)} \, dt$$

(1.0) a) Calcule $F'(x)$.

(1.0) b) Estude a concavidade da função $F(x)$.

Folha de rascunho