

Exame de Tópicos de Matemática II

LCD e LCD-PL
Departamento de Matemática – Ista – Iscte
4 de Julho 2020
Duração da prova: 2h00

(3.25 val)

1. Comece por considerar a função

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy+3y^2}{x^4+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial g}{\partial y}$ em todos os pontos onde esta derivada está definida.

2. Vamos agora considerar uma função $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$w(x, y) = f(xy^2, 2x^3 + y) ,$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 .

Determine, em termos das derivadas parciais de f , expressões para:

(2.00 val)

(a) $\frac{\partial w}{\partial y}$,

(1.00 val)

(b) $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

3. Para $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3$.

(3.00 val)

- (a) Determine e classifique os pontos críticos de f .

(0.75 val)

- (b) Calcule $f'_{\vec{v}}(1, 0)$, para $\vec{v} = (-1, 2)$.

(0.75 val)

- (c) Encontre um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $f'_{\vec{u}}(1, 0) = 0$.

(0.75 val)

- (d) Determine a primeira iteração do método de descida máxima com semente em $(1, 0)$ e passo $h = 0.05$.

4. Considere o integral

$$\int_0^2 \int_{-2x}^{\frac{1}{2}x^2} x^2 + y \, dy \, dx .$$

(1.00 val)

- (a) Represente o domínio de integração.

(1.00 val)

- (b) Troque a ordem de integração.

(2.00 val)

- (c) Escolha uma das ordens de integração e determine o valor do integral.

(3.00 val)

5. Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides de revolução $z = -x^2 - y^2 + 2$ e $z = 2x^2 + 2y^2 - 4$, e pela condição $x \leq 0$.

(1.50 val)

6. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$F(x, y) = \int_1^x \int_2^y e^{t^2 s^2} \, ds \, dt .$$