14.3 Exercícios

1. A temperatura T (em °C)de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.
   (a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?
   (b) Honolulu tem longitude de 158° W e latitude de 21° N. Suponha que às 9 horas em 1° de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a Oeste e a Sul o ar esteja quente e a Norte e Leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ fossem positivos ou negativos? Explique.

2. No início desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o humidex; T, a temperatura; e H, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(34, 75)$ e $f_H(34, 75)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

3. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

   (a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?
   (b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?
   (c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

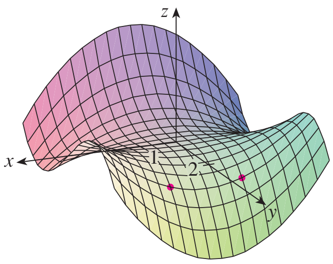
Velocidade do vento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

   (a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?
   (b) Estime os valores de $f_v(80, 15)$ e $f_t(80, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?
   (c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

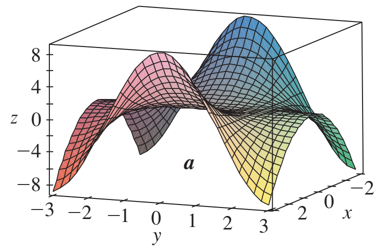
$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

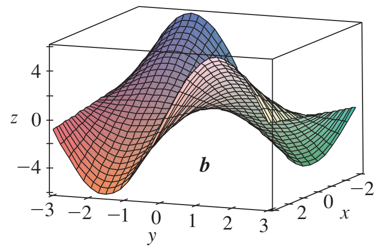
5–8 Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.

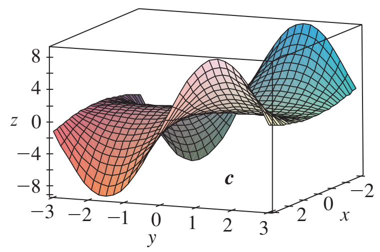


5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$
6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$
8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

9. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c, são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.





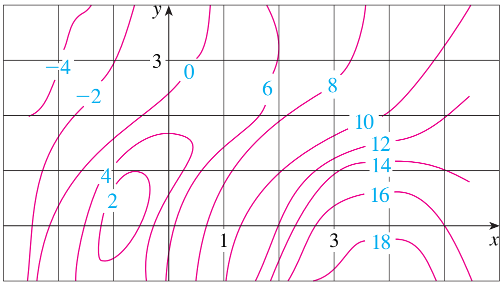


É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

10. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Utilize-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



11. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

12. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

13–14 Determine f_x e f_y e faça os gráficos f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

13. $f(x, y) = x^2y^3$

14. $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$

15–40 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

16. $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

17. $f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$

18. $f(x, t) = \sqrt{x}\ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$

20. $z = \operatorname{tg} xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

22. $f(x, y) = \dfrac{x}{(x + y)^2}$

23. $f(x, y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$

24. $w = \dfrac{e^v}{u + v^2}$

25. $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$

26. $f(x, t) = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{t}\right)$

27. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

28. $f(x, y) = x^y$

29. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t)\, dt$

30. $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

31. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$

32. $f(x, y, z) = x\operatorname{sen}(y - z)$

33. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

34. $w = ze^{xyz}$

35. $u = xy\operatorname{sen}^{-1}(yz)$

36. $u = x^{y/z}$

37. $h(x, y, z, t) = x^2y\cos(z/t)$

38. $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta y^2}$

39. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

40. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

41–44 Determine as derivadas parciais indicadas.

41. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

42. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$; $f_x(2, 3)$

43. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

44. $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

45–46 Use a definição de derivadas parciais como limites $\boxed{4}$ para encontrar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

45. $f(x, y) = xy^2 - x^3y$

46. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

47–50 Use a derivação implícita para encontrar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

47. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

48. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

49. $e^z = xyz$

50. $yz + x\ln y = z^2$

51–52 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

51. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

52. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

53–58 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

53. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

54. $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

55. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

56. $v = \dfrac{xy}{x - y}$

57. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$

58. $v = e^{xe^y}$

59–62 Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

59. $u = x^4y^3 - y^4$

60. $u = e^{xy}\operatorname{sen} y$

61. $u = \cos(x^2y)$

62. $u = \ln(x + 2y)$

63–70 Determine a(s) derivada(s) parcial(is) indicada(s).

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$; f_{xxx}, f_{xyx}

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$; f_{yxy}

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; f_{xyz}

66. $g(r, s, t) = e^r\operatorname{sen}(st)$; g_{rst}

67. $u = e^{r\theta}\operatorname{sen}\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\, \partial\theta}$

68. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$

69. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}$

70. $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z^3}$

71. Se $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{z}\right)$, determine f_{xzy}. [*Dica*: Qual ordem de diferenciação é a mais fácil?]

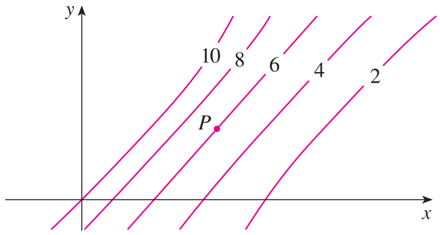
72. Se $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, determine g_{xyz}. [*Dica*: Use uma ordem de diferenciação diferente para cada termo.]

73. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

74. As curvas de nível são mostradas para uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



75. Verifique se a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 t}$ sen kx é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

76. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
(f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

77. Verifique se a função u $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

78. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

(a) $u = \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

79. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 78.

80. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

81. Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$$

82. A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em ºC e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(2, 1)$ em (a) a direção x e (b) a direção y.

83. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

84. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{\beta}$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

85. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 6.)

86. Cobb e Douglas usaram a equação $P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$ para o modelo de economia norte-americana de 1899 a 1922, onde L é a quantidade de trabalho e K, a quantidade de capital. (Veja o Exemplo 3 na Seção 14.1.)

(a) Calcule P_L e P_K.
(b) Encontre a produtividade marginal de trabalho e a produtividade marginal de capital no ano de 1920, quando $L = 194$ e $K = 407$ (em comparação com os valores atribuídos $L = 100$ e $K = 100$ em 1899). Interprete os resultados.
(c) No ano de 1920, o que trouxe mais benefícios para a produção: um aumento no capital de investimento ou um aumento nos gastos com mão de obra?

87. A *equação de van der Waals* para n mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura do gás. A constante R é a constante universal de gás e a e b são constantes positivas que são características de um gás em particular. Calcule $\partial T/\partial P$ e $\partial P/\partial V$.

88. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

89. Para o gás ideal do Exercício 88, mostre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

90. O índice de sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde T é a temperatura (ºC) e v, a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ ºC e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente W caia se a temperatura real decrescer em 1ºC? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

91. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

92. Se a, b e c são os lados de um triângulo e A, B e C são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela derivação implícita da Lei dos Cossenos.

93. Disseram-lhe que existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$. Você deve acreditar nisso?

94. O paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 2, -4)$. Use um computador para fazer o gráfico do paraboloide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.

95. O elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

96. No estudo de penetração do congelamento descobriu-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em metros) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e λ é uma constante positiva.
(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?
(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?
(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante k.
(d) Se $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.
(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

97. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de f forem contínuas, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

98. (a) Quantas derivadas parciais de n-ésima ordem têm uma função de duas variáveis?
(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas delas podem ser distintas?
(c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

99. (a) Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2} e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$, determine $f_x(1, 0)$.
[*Dica*: Em vez de determinar $f_x(x, y)$ primeiro, observe que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

100. (a) Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

101. (a) . Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de f.
(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.
(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.
(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.
(e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Uma das ideias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que damos *zoom* em torno de um ponto no gráfico de uma função diferenciável, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10, no Volume I.) Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões. À medida que damos *zoom* em torno de um ponto na superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, essa superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a ideia de diferencial para as funções de duas ou mais variáveis.

Planos Tangentes

Suponha que uma superfície S tenha a equação $z = f(x, y)$, onde f tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S. Como na seção anterior, sejam C_1 e C_2 as curvas obtidas pela intersecção dos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$ com a superfície S. Então o ponto P fica em C_1 e C_2. Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes à curva C_1 e C_2 no ponto P. Então o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as retas da tangente T_1 e T_2 (veja a Figura 1.)

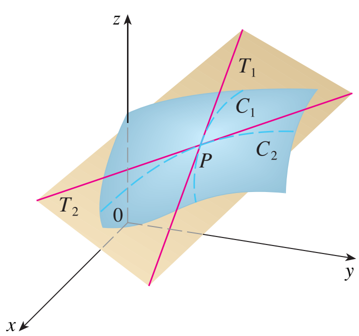


FIGURA 1
O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2.

Veremos na Seção 14.6 que, se C é outra curva qualquer que esteja contida na superfície S e que passe pelo ponto P, então sua reta tangente no ponto P também pertence ao plano tangente. Portanto, podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em S que passam pelo ponto P. O plano tangente em P é o plano que melhor aproxima a superfície S perto do ponto P.

Sabemos da Equação 12.5.7 que qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dividindo essa equação por C e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como