



Caderno de Exercícios

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

ANO LECTIVO: 2010/2011

CURSOS DO 1º CICLO: ETI, EI e IGE

Elaborado pela docente ROSÁRIO LAUREANO

DMQ – Dpto de Métodos Quantitativos

1 Exercícios propostos

1.1 Primitivas imediatas e quase-ediatas

1. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = 5x^6 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}$

(b) $f(x) = \frac{(3x-1)^2}{3x}$

(c) $f(x) = \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x^5}$

(d) $f(x) = x(x^2+2)^3$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[5]{x}$

(f) $f(x) = (8-3x)\sqrt[5]{8-3x}$

(g) $f(x) = (x+1)^{15}$

(h) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[5]{3-x^4}}$

2. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$

(b) $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$

(c) $f(x) = \frac{3}{4+x^2}$

$$(d) \ f(x) = \frac{3x^2}{1+x^2}$$

$$(e) \ f(x) = \frac{3}{(1+x)^2}$$

3. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \ f(x) = \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b) \ f(x) = \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(c) \ f(x) = \frac{5}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(d) \ f(x) = \frac{5}{\sqrt{16-9x^2}}$$

4. Prove as seguintes igualdades [note que as alíneas 2.c) e 3.c) d) são casos particulares do que é proposto neste exercício]:

$$(a) \ \int \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} x \right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R};$$

$$(b) \ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} dx = \frac{1}{b} \arcsin \left(\frac{b}{a} x \right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}.$$

5. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$(b) \ f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}$$

6. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = 5x \exp(x^2)$

(b) $f(x) = \frac{\exp(x^{-1})}{x^2}$

(c) $f(x) = \exp[2 \sin(x) \cos x] \cos(2x)$

(d) $f(x) = \frac{1}{\exp(-x)(1 + 4 \exp x)}$

(e) $f(x) = \frac{\exp(6x)}{\sqrt{1 - \exp(6x)}}$

(f) $f(x) = (1 + \exp x)^2$

(g) $f(x) = \frac{\exp(\tan x)}{\cos^2 x}$

7. Seja $v(x) = \exp(2x)$. Determine a expressão geral das primitivas das funções

$$f(x) = \frac{v(x)}{1 + \exp(4x)}, \quad g(x) = \frac{v(x)}{2 - v(x)} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{v(x) - 1}{\exp x}.$$

8. Seja $w(x) = \ln x$. Determine a expressão geral das primitivas das funções

$$f(x) = \frac{1}{xw(x)}, \quad h(x) = \frac{1}{x(3 + w^2(x))} \quad \text{e} \quad j(x) = \frac{\sqrt[3]{w(x)} + \sin w(x)}{x}.$$

9. Considere $q(x) = \sqrt{x}$. Determine a expressão geral das primitivas das funções

$$f(x) = \frac{1}{q(x)\sqrt{1-x}}, \quad g(x) = \frac{1}{(1+x)q(x)} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{q(x)\sqrt{1+q(x)}}.$$

10. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^2 \cos(x^3)$

(b) $f(x) = \tan(3x)$

(c) $f(x) = \cot(5x - 7)$

(d) $f(x) = \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}$

(e) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{3}x^2\right)$

(f) $f(x) = \sin^3(x) \cos x$

(g) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x}$

(h) $f(x) = \frac{\sin(x) + \cos x}{\sin^3 x}$

(i) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

11. Prove as seguintes igualdades ($p \in \mathbb{Q}$, $p \neq -1$) [note que as alíneas 10.f) - i) são casos particulares do que é proposto neste exercício]

(a) $\int [\sin^p(x) \cos x] dx = \frac{1}{p+1} \sin^{p+1}(x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$;

(b) $\int [\cos^p(x) \sin x] dx = -\frac{1}{p+1} \cos^{p+1}(x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$.

12. Considere as funções

$$f(x) = \sin^3 x, \quad g(x) = \cos^4 x, \quad h(x) = \cos^5 x \quad \text{e} \quad j(x) = \sin^2(3x)$$

definidas por potências de seno ou de cosseno. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma destas funções.

13. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = x \tan(x^2)$

(b) $f(x) = \sec^2(7x)$

(c) $f(x) = \frac{\sec^2 x}{\tan^5 x}$

(d) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right) \sec^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

(e) $f(x) = \frac{1}{[2 + 3 \tan(5x)] \cos^2(5x)}$

(f) $f(x) = \frac{2 \arctan^3 x}{1 + x^2}$

(g) $f(x) = \frac{\arcsin(x) + x}{\sqrt{1 - x^2}}$

(h) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$

(i) $f(x) = \frac{\cos(2x)}{1 + \sin(x) \cos x}$

14. Seja $j(x) = \sin(2x)$. Determine a expressão geral das primitivas das funções

$$f(x) = \frac{j(x)}{1 + \cos^2 x}, \quad g(x) = \frac{j(x)}{1 + \cos^4 x} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{j(x)}{\cos^2(\sin^2 x)}.$$

1.2 Primitivação de funções racionais

1. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções racionais:

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x}$

$$(b) \ f(x) = \frac{x+4}{x^2+8x+7}$$

$$(c) \ f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$$

$$(d) \ f(x) = \frac{x}{3x^4+1}$$

$$(e) \ f(x) = \frac{1}{x^2+2}$$

2. Considere os polinómios de grau 2

$$d_1(x) = x^2 + 6x + 9, \quad d_2(x) = x^2 + 6x + 8 \quad \text{e} \quad d_3(x) = x^2 + 6x + 10.$$

(a) Averigue a possibilidade de factorizar cada um dos polinómios em polinómios de grau 1.

(b) Determine a expressão geral das primitivas das funções racionais

$$f(x) = \frac{1}{d_1(x)}, \quad g(x) = \frac{1}{d_2(x)} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{d_3(x)}.$$

(c) Determine a expressão geral das primitivas das funções racionais

$$j(x) = \frac{x+1}{d_1(x)}, \quad k(x) = \frac{x+1}{d_2(x)} \quad \text{e} \quad l(x) = \frac{x+1}{d_3(x)}.$$

3. Escreva cada uma das funções racionais

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 5}{x^3 + 2x^2 + x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2x^3 + 2}{8x + 6x^2 + x^3}$$

com base numa fracção própria e, de seguida, determine a expressão geral das suas primitivas.

4. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções racionais:

$$(a) \ f(x) = \frac{2x+1}{x^3+6x^2+10x}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{x^2 - x + 14}{(x - 4)^3 (x - 2)}$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{3}{(x^2 - 4)^2}$$

$$(d) \quad f(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$$

5. Sabendo que 2 é raiz do denominador da função racional

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8},$$

determine a expressão geral das primitivas da função f .

1.3 Métodos de primitivação por partes e por substituição

1. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \quad f(x) = x \ln(x + 3)$$

$$(b) \quad f(x) = x^2 \exp x$$

$$(c) \quad f(x) = x^2 \sin x$$

$$(d) \quad f(x) = (x^2 + 6x - 2) \exp\left(\frac{1}{3} x\right)$$

$$(e) \quad f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2} x\right)$$

$$(f) \quad f(x) = x^3 \exp(x^2)$$

$$(g) \quad f(x) = \arcsin(2x)$$

$$(h) \quad f(x) = \exp(x) \sin(2x)$$

$$(i) \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos(3x)$$

$$(j) \quad f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$(k) \quad f(x) = (x+3) \exp\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$(l) \quad f(x) = (2x^2 + 1) \exp(3x)$$

$$(m) \quad f(x) = x \exp(2x)$$

$$(n) \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$(o) \quad f(x) = \frac{x+2}{3} \cos(5x)$$

$$(p) \quad f(x) = \arctan(3x)$$

$$(q) \quad f(x) = \exp(2x) \sin(3x)$$

$$(r) \quad f(x) = (2x-1) \sin(2x)$$

$$(s) \quad f(x) = x^7 \exp(x^4)$$

$$(t) \quad f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$(u) \quad f(x) = \sin(2x) \cos(3x)$$

$$(v) \quad f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$(w) \quad f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(x) \quad f(x) = \exp(3x) [\sin(2x) - \cos(2x)]$$

$$(y) \quad f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}$$

$$(z) \quad f(x) = x \arctan^2 x$$

2. Seja $a(x) = \ln x$. Determine a expressão geral das primitivas das funções

$$a(x), \quad f(x) = xa(x), \quad g(x) = \frac{a(x)}{\sqrt{x}}, \quad h(x) = \frac{a^2(x)}{x^2}$$

$$j(x) = \cos[a(x)], \quad k(x) = \frac{\ln[a(x)]}{x} \quad \text{e} \quad l(x) = \cos^2[a(x)]$$

3. Considere a função $f(x) = (\sqrt{x} + 3)^4$.

- (a) Desenvolva a função f em potências de x e calcule a expressão geral das suas primitivas.
- (b) Utilize a mudança de variável dada pela relação $\sqrt{x} = t$ para confirmar a expressão das primitivas obtida na alínea anterior.

4. Determine a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{1}{2 + \exp x}$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$$

$$(d) \quad f(x) = \cos \sqrt[3]{x}$$

$$(e) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

$$(f) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$$

$$(g) \ f(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{(2x - 5)^3}}$$

$$(h) \ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

$$(i) \ f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}$$

$$(j) \ f(x) = x^3 (2 + 3x^2)^{-3/2}$$

$$(k) \ f(x) = \frac{\sqrt{3x + 1}}{1 + \sqrt[5]{3x + 1}}$$

$$(l) \ f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x - 1}}$$

$$(m) \ f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

$$(n) \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$$

5. Utilize substituições trigonométricas para determinar a expressão geral das primitivas de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4}$$

$$(b) \ f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}$$

$$(c) \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - (x - 3)^2}}$$

$$(d) \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 + (x - 5)^2}}$$

2 Soluções dos exercícios propostos

2.1 Primitivas imediatas e quase-imediatas

1. (a) $\frac{5}{7}x^7 - \frac{3}{x} + 4 \ln |x| + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(b) $\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3} \ln |x| + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(c) $-\frac{1}{2x^2} - \frac{4}{5x^2\sqrt{x}} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(d) $\frac{1}{8}(x^2 + 2)^4 + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(e) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{3}x\sqrt[5]{x} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(f) $-\frac{5}{33}(8 - 3x)^2\sqrt[5]{8 - 3x} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(g) $\frac{(x+1)^{16}}{16} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(h) $-\frac{5}{16}\sqrt[5]{(3 - x^4)^4} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
2. (a) $\frac{3}{2} \ln |1 + x^2| + K = \frac{3}{2} \ln (1 + x^2) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(b) $3 \arctan(x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(c) $\frac{3}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(d) $3(x - \arctan x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
(e) $-\frac{3}{1+x} + K$, com $K \in \mathbb{R}$

3. (a) $-5\sqrt{1-x^2} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (b) $5 \arcsin(x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (c) $5 \arcsin\left(\frac{1}{2}x\right) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (d) $\frac{5}{3} \arcsin\left(\frac{3}{4}x\right) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
4. (a) $\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a}x\right) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (b) $\frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{b}{a}x\right) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
5. (a) $\frac{1}{3} \arcsin(x^3) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (b) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6} + K$, $K \in \mathbb{R}$
6. (a) $\frac{5}{2} \exp(x^2) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (b) $-\exp(x^{-1}) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (c) $\frac{1}{2} \exp(\sin(2x)) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (d) $\frac{1}{4} \ln(1 + 4 \exp x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (e) $-\frac{1}{3}\sqrt{1 - \exp(6x)} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
 (f) $x + 2 \exp x + \frac{\exp^2 x}{2} + K$, com $K \in \mathbb{R}$

$$(g) \exp(\tan x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$7. Pf(x) = \frac{1}{2} \arctan[\exp(2x)] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pg(x) = -\frac{1}{2} \ln|2 - \exp(2x)| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Ph(x) = \exp(x) + \exp(-x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$8. Pf(x) = \ln|\ln x| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Ph(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln x\right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pj(x) = \frac{3}{4} \ln(x) \sqrt[3]{\ln x} - \cos(\ln x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$9. Pf(x) = 2 \arcsin(\sqrt{x}) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pg(x) = 2 \arctan(\sqrt{x}) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Ph(x) = 4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$10. (a) \frac{1}{3} \sin(x^3) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(b) -\frac{1}{3} \ln|\cos(3x)| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(c) \frac{1}{5} \ln|\sin(5x - 7)| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(d) \frac{1}{5} \ln|\sin(5x)| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(e) -\frac{3}{2} \cos\left(\frac{1}{3}x^2\right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(f) \frac{1}{4} \sin^4(x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(g) \frac{1}{3 \cos^3 x} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(h) -\cot(x) - \frac{1}{2 \sin^2 x} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(i) 3\sqrt[3]{\sin x} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$11. (a) \frac{1}{p+1} \sin^{p+1}(x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(b) -\frac{1}{p+1} \cos^{p+1}(x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$12. P \sin^3 x = -\cos(x) + \frac{\cos^3 x}{3} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$P \cos^4 x = \frac{1}{4} \left[x + \sin(2x) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin(4x) \right) \right] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$P \cos^5 x = \sin(x) - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5(x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$P \sin^2(3x) = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{6} \sin(6x) \right] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$13. (a) -\frac{1}{2} \ln |\cos(x^2)| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(b) \frac{1}{7} \tan(7x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(c) -\frac{1}{4 \tan^4 x} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(d) \frac{1}{2} \tan^2 \left(\frac{1}{2} x \right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(e) \frac{1}{15} \ln |2 + 3 \tan (5x)| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(f) \frac{\arctan^4 x}{2} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(g) \frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1 - x^2} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(h) \arctan (\sin x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(i) \ln [2 + \sin (2x)] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$14. Pf(x) = -\ln (1 + \cos^2 x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pg(x) = -\arctan (\cos^2 x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Ph(x) = \tan (\sin^2 x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

2.2 Primitivação de funções racionais

$$1. (a) \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(b) \frac{1}{2} \ln |x^2 + 8x + 7| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(c) \frac{1}{6} \ln (1 + x^6) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(d) \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan (\sqrt{3}x^2) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(e) \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x \right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad (\text{a}) \quad d_1(x) = (x+3)^2, \quad d_2(x) = (x+2)(x+4) \quad \text{e} \quad d_3(x) = (x+3)^2+1$$

$$(\text{b}) \quad Pf(x) = -\frac{1}{x+3} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pg(x) = \frac{1}{2} \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x+4| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Ph(x) = \arctan(x+3) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(\text{c}) \quad Pj(x) = \frac{2}{x+3} + \ln|x+3| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pk(x) = -\frac{1}{2} \ln|x+2| + \frac{3}{2} \ln|x+4| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pl(x) = \frac{1}{2} \ln \left| (x+3)^2 + 1 \right| - 2 \arctan(x+3) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad f(x) = x - 2 + \underbrace{\frac{4x^2 + 2x + 5}{x^3 + 2x^2 + x}}_{\text{fracção própria}}$$

$$Pf(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 5 \ln|x| + \frac{7}{x+1} - \ln|x+1| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}.$$

$$g(x) = 2 + \underbrace{\frac{-12x^2 - 16x + 2}{x^3 + 6x^2 + 8x}}_{\text{fracção própria}}$$

$$Pg(x) = 2x + \frac{1}{4} \ln|x| + \frac{7}{4} \ln|x+2| - \frac{63}{4} \ln|x+4| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}.$$

$$4. \quad (\text{a}) \quad \frac{1}{10} \ln|x| - \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} \ln \left| (x+3)^2 + 1 \right| - 17 \arctan(x+3) \right] + K,$$

$$\text{com } K \in \mathbb{R}$$

- (b) $-\frac{13}{2(x-4)^2} + \frac{3}{x-4} + 2 \ln \left| \frac{x-4}{x-2} \right| + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (c) $3 \left[-\frac{1}{16} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{32} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \right] + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (d) $\frac{1}{4} \ln \frac{|(x-1)(x+1)|}{x^2+1} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
5. $-\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} + K$, com $K \in \mathbb{R}$.

2.3 Métodos de primitivação por partes e por substituição

1. (a) $\frac{1}{2} \left[(x^2 - 9) \ln(x+3) - \frac{x^2}{2} + 3x \right] + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (b) $(x^2 - 2x + 2) \exp(x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (c) $(2 - x^2) \cos(x) + 2x \sin(x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (d) $(3x^2 - 6) \exp\left(\frac{1}{3}x\right) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (e) $x \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) - \ln(4 + x^2) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (f) $\frac{1}{2} (x^2 - 1) \exp(x^2) + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (g) $x \arcsin(2x) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x^2} + K$, com $K \in \mathbb{R}$
- (h) $\frac{1}{5} \exp(x) [\sin(2x) - 2 \cos(2x)] + K$, com $K \in \mathbb{R}$

- (i) $\frac{2}{35} \left[\cos \left(\frac{1}{2} x \right) \cos (3x) + 6 \sin \left(\frac{1}{2} x \right) \sin (3x) \right] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (j) $x \tan x + \ln |\cos x| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (k) $(2x + 2) \exp \left(\frac{1}{2} x \right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (l) $\left(\frac{2x^2 + 1}{3} - \frac{4}{9}x + \frac{4}{27} \right) \exp (3x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (m) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \exp(2x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (n) $x \arcsin \left(\frac{1}{3} x \right) + \sqrt{9 - x^2} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (o) $\frac{x + 2}{15} \sin (5x) + \frac{1}{75} \cos (5x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (p) $x \arctan(3x) - \frac{1}{6} \ln (1 + 9x^2) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (q) $\frac{1}{13} [2 \sin (3x) - 3 \cos (3x)] \exp (2x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}.$
- (r) $\frac{1 - 2x}{2} \cos (2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (s) $\frac{1}{4} (x^4 - 1) \exp (x^4) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (t) $-x \cot (x) + \ln |\sin x| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$
- (u) $\frac{2}{5} \cos(2x) \cos (3x) + \frac{3}{5} \sin(2x) \sin (3x) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}.$
- (v) $x \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) - \sqrt{1 + x^2} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

$$(w) \sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(x) \frac{1}{13} [\exp(3x) (\sin(2x) - 5 \cos(2x))] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(y) -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(z) \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan^2(x) - x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + K,$$

com $K \in \mathbb{R}$

$$2. Pa(x) = x [\ln(x) - 1] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pf(x) = \frac{x^2}{2} \left[\ln(x) - \frac{1}{2} \right] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pg(x) = 2\sqrt{x} [\ln(x) - 2] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Ph(x) = -\frac{1}{x} [\ln^2(x) + 2 \ln(x) + 2] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pj(x) = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pk(x) = \ln(x) [\ln(\ln x) - 1] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$Pl(x) = x [\cos^2(\ln x) - \cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$3. (a) f(x) = x^2 + 12x\sqrt{x} + 54x + 108\sqrt{x} + 81$$

$$Pf(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{24x^2\sqrt{x}}{5} + 27x^2 + 72x\sqrt{x} + 81x + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(b) Pf(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{24x^2\sqrt{x}}{5} + 27x^2 + 72x\sqrt{x} + 81x + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

4. (a) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 3\ln|\sqrt[3]{x} + 1| + K,$

com $K \in \mathbb{R}$

(b) $-\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{\exp x}\right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

Note que esta primitiva pode ser resolvida como quase-imediata.

(c) $2[\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x+1} + 1)], \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(d) $3\sqrt[3]{x^2}\sin(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x}\cos(\sqrt[3]{x}) - 6\sin(\sqrt[3]{x}) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(e) $2(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(f) $x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x} - 1| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x+25}{3}\sqrt{2x-5} - \frac{37}{\sqrt{2x-5}}\right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctan(\sqrt[6]{x}) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(i) $\left(\frac{2}{3}\ln(x) - \frac{4}{3}\right)\sqrt{1+\ln x} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(j) $-\frac{x^2}{3\sqrt{2+3x^2}} + \frac{2}{9}\sqrt{2+3x^2} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

(k) $\frac{10}{39}(3x+1)\sqrt[10]{(3x+1)^3} - \frac{10}{33}(3x+1)\sqrt[10]{3x+1} + \frac{10}{27}\sqrt[10]{(3x+1)^9}$
 $-\frac{10}{21}\sqrt[10]{(3x+1)^7} + \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{10}{9}\sqrt[10]{(3x+1)^3} + \frac{10}{3}\sqrt[10]{3x+1}$
 $-\frac{10}{3}\arctan(\sqrt[10]{3x+1}) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$

$$(l) \ 3\frac{2x+3}{10}\sqrt[3]{(x-1)^2} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(m) \ -\frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{x} + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(n) \ \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$5. \ (a) \ \frac{1}{12}\frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{x^3} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(b) \ -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right| + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(c) \ \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-(x-3)^2}}\right) + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

$$(d) \ \ln\frac{\left|x-5+\sqrt{4+(x-5)^2}\right|}{2} + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$