



ANÁLISE MATEMÁTICA II

Caderno de Exercícios

CÁLCULO DIFERENCIAL em $\mathbb{R}^n$

ANO LECTIVO: 2010/2011

CURSOS: ETI, ETI-PL e EI

Elaborado pelas docentes: DIANA MENDES
ROSÁRIO LAUREANO

DMQ – Dpto de Métodos Quantitativos

1 Domínios de Definição

- Uma **função real** (ou **escalar**) de n **variáveis reais**, com $n \geq 1$, é uma função f cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{aligned} f &: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\in D_f \mapsto y = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por uma expressão com n variáveis. A designação "função real" indica que o contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ então o gráfico de f é

$$Gr(f) = \{(x_1, x_2, y) \in D_f \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid y = f(x_1, x_2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

e pode ser pensado como uma superfície no espaço.

Exemplo 1 A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

de domínio $D_f = \mathbb{R}^2$, tem como gráfico um parabolóide de vértice $(0, 0, 0)$. As funções $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x, y) = 5 + x^2 + y^2 \quad e \quad h(x, y) = (x - 3)^2 + y^2,$$

respectivamente, têm o mesmo domínio, $D_{g,h} = \mathbb{R}^2$. No entanto, o gráfico de g é um parabolóide de vértice $(0, 0, 5)$ e o gráfico de h é um parabolóide de vértice $(3, 0, 0)$. Os gráficos de g e de h correspondem a translações do gráfico de f (translação segundo o vector $\vec{v} = (0, 0, 5)$ no caso de g e translação segundo o vector $\vec{v} = (3, 0, 0)$ no caso de h).

- Uma **função vectorial** (ou **campo de vectores**) de n **variáveis reais** é uma função $\mathbf{f}$ cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ com $m \geq 2$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ com } m \geq 2 \\ (x_1, \dots, x_n) &\in D_{\mathbf{f}} \mapsto (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

em que $(y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$. Uma função $D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é definida por um sistema de m funções

$f_1, \dots, f_m$ reais de n variáveis reais, designadas por **funções componentes** da função $\mathbf{f}$. O domínio $D_{\mathbf{f}}$ corresponde à intersecção dos domínios das funções componentes $f_1, \dots, f_m$, ou seja,

$$D_{\mathbf{f}} = D_{f_1} \cap \dots \cap D_{f_m}.$$

Se $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ então o gráfico de $\mathbf{f}$ é

$$Gr(\mathbf{f}) = \{(x, y_1, y_2) \in D_{\mathbf{f}} \times \mathbb{R}^2 \mid y_1 = f_1(x) \wedge y_2 = f_2(x)\} \subset \mathbb{R}^3$$

e pode ser pensado como uma curva no espaço.

- Dada um função real $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ou uma função vectorial $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, podem constituir o seu domínio todos os elementos de $\mathbb{R}^n$ para os quais é possível efectuar todas as operações indicadas na(s) expressão(ões) que definem a função. Para tal, há que ter em conta as condições seguintes:

$$\text{para } \frac{u}{v} \text{ exigimos } v \neq 0$$

$$\text{para } \sqrt[n]{u} \text{ (com } n \text{ par) exigimos } u \geq 0$$

$$\text{para } u^v \text{ exigimos } u > 0$$

$$\text{para } \log_a u \text{ exigimos } u > 0$$

$$\text{para } \tan u \text{ exigimos } u \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{para } \cot u \text{ exigimos } u \neq \pm \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{para } \arcsin u \text{ ou } \arccos u \text{ exigimos } -1 \leq u \leq 1.$$

Exemplo 2 Por exemplo, $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) = \left(x^2 + y^2, \frac{x}{y}, \frac{1}{y+2}\right)$$

tem por funções componentes $f_1(x, y) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y) = x/y$ e $f_3(x, y) = 1/(y+2)$. Neste exemplo tem-se $D_{\mathbf{f}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} \subset \mathbb{R}^2$ que corresponde à intersecção

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{f}} &= D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} \\ &= \mathbb{R}^2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2\}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}. \end{aligned}$$

1.1 Exercícios Propostos

1. Dadas as seguintes funções $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, determine e represente graficamente o domínio de definição D_f para cada uma:

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{3x}{3x + y - 2}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$(c) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$$

$$(d) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3x}$$

$$(e) \quad f(x, y) = \ln(x + y)$$

$$(f) \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - (x + 1)^2 - y^2}}{\sqrt[4]{y - x^2}}$$

$$(g) \quad f(x, y) = \ln(1 - x + y), \text{ com } x, y \geq 0$$

$$(h) \quad f(x, y) = \frac{\ln(4 - x - y)}{\sqrt[4]{xy - 3}}$$

$$(i) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$$

$$(j) \quad f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$$

$$(k) \quad f(x, y) = \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{x^2 - 4}$$

$$(l) \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

$$(m) \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$(n) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$$

$$(o) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$(p) \quad f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$$

$$(q) \quad f(x, y) = \ln(1 - x^2) + \cos(xy)$$

$$(r) \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x^2-y}}$$

$$(s) \quad f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

$$(t) \quad f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^{xy}$$

2. Determine o domínio de definição D de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x+y)} & \text{se } (x, y) \text{ tal que } x+y > 0 \\ \sqrt{1-x-y} & \text{se } (x, y) \text{ tal que } x+y \leq 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2 < 1 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} \ln(y-x^2) & \text{se } \sqrt{x^2+y^2} \geq 2 \\ \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } \sqrt{x^2+y^2} < 2 \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3+3y^4}{2x^3-y^3} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(e) \quad f(x, y) = \begin{cases} \ln(3x+y) & \text{se } (x, y) \text{ tal que } 3x+y > 0 \\ \frac{1}{x+y} & \text{se } (x, y) \text{ tal que } 3x+y \leq 0 \end{cases}$$

$$(f) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3y^2 - x} & \text{se } (x, y) \text{ tal que } x \neq 3y \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ tal que } x = 3y \end{cases}$$

$$(g) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2y - 1} & \text{se } y \neq 1 \\ 1 & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

$$(h) \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \exp \frac{x-y}{x+y} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Considere a função vectorial $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y) \equiv \begin{cases} f_1(x, y) = y + \sqrt{x - x^2} \\ f_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy - 1}} \end{cases}.$$

Determine o domínio de definição de $\mathbf{f}$ e represente-o graficamente.

4. Considere a função

$$f(x, y) = \ln(xy - 1) + \sqrt{9 - (x - 1)^2 - y^2}.$$

Determine o domínio de definição da função f e represente-o graficamente.

5. Para o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1 \wedge y - x \leq 1 \wedge y \geq 0\}$, considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2 + 1} & \text{se } (x, y) \in A \\ 1 & \text{se } (x, y) \notin A \end{cases}.$$

Determine o domínio de definição da função f .

6. Determine o domínio de definição D_f de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x^2 \sin^2(y) + y^3 \cos^2(x)}{x^4 + y^4 + 2x^2 y^2}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2}{3x + y} & \text{se } (x, y) \text{ tal que } y \neq x \\ 1 & \text{se } (x, y) \text{ tal que } y = x \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & \text{se } x \neq \pm y \\ 0 & \text{se } x = \pm y \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 4y^2}{x^2 - 5y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2 Limites e Continuidade

- Considere em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$, a **distância euclidiana** definida por

$$d[(x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)]_{\mathbb{R}^n} = \|(x_1, \dots, x_n) - (a_1, \dots, a_n)\|,$$

ou seja,

$$d[(x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)]_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} \in \mathbb{R}_0^+.$$

Em $\mathbb{R}$ ($n = 1$) esta distância pode traduzir-se pelo módulo da diferença entre os pontos,

$$d(x, a)_{\mathbb{R}} = \sqrt{(x - a)^2} = |x - a|.$$

- Dado um ponto $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ e um número real positivo ε , a **bola aberta** de centro em $(a_1, \dots, a_n)$ e raio ε , que se denota por $B_\varepsilon(a_1, \dots, a_n)$ ou $B((a_1, \dots, a_n), \varepsilon)$, é o conjunto de todos os pontos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto $(a_1, \dots, a_n)$ é inferior a ε , ou seja,

$$B_\varepsilon(a_1, \dots, a_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid d[(x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)]_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\}.$$

Para $n = 1$ a bola aberta é o segmento de recta $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, enquanto para $n = 2$ é o interior do círculo de centro (a_1, a_2) e raio ε , pois obtemos

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \varepsilon^2.$$

Para $n = 3$ a bola aberta é o interior da esfera de centro (a_1, a_2, a_3) e raio ε , pois

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < \varepsilon^2.$$

- Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Um ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é um **ponto de acumulação** de D se em qualquer bola aberta $B_\varepsilon(a_1, \dots, a_n)$ de centro $(a_1, \dots, a_n)$ existe pelo menos um ponto de D distinto de $(a_1, \dots, a_n)$, ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists (x_1, \dots, x_n) \in D \setminus \{(a_1, \dots, a_n)\}$ tal que

$$(x_1, \dots, x_n) \in B_\varepsilon(a_1, \dots, a_n).$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação do conjunto D designa-se por **derivado de D** e denota-se por D' . Um ponto que não é de acumulação de D diz-se um **ponto isolado**.

Assim, um ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é de acumulação do conjunto D se em qualquer sua "vizinhança" existe pelo menos um outro ponto (diferente dele) que pertence a D . Na verdade, tal implica que em qualquer vizinhança de $(a_1, \dots, a_n)$ existem infinitos pontos de D , ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(a_1, \dots, a_n) \cap D \text{ é um conjunto infinito.}$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e (a, b) um ponto de acumulação de D_f . Diz-se que $l \in \mathbb{R}$ é o **limite** de f no ponto (a, b) se e só se para todo $\delta > 0$ existe um $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ (dependente do δ tomado) tal que $d(f(x, y), l) < \delta$ sempre que $d((x, y), (a, b)) < \varepsilon$ e $(x, y) \in D_f \setminus \{(a, b)\}$, ou seja, $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ tal que

$$d((x, y), (a, b))_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon \wedge (x, y) \in D_f \setminus \{(a, b)\} \implies d(f(x, y), l)_{\mathbb{R}} < \delta.$$

Considerando a distância euclidiana, tem-se $l = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ se e só se $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ tal que

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \varepsilon \wedge (x, y) \in D_f \setminus \{(a, b)\} \implies |f(x, y) - l| < \delta.$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de D_f . A aproximação a um ponto (a, b) pode fazer-se através de qualquer uma das infinitas direcções do plano. Como tal, quando ocorrem indeterminações há que considerar os **limites direccionais** e os **limites sucessivos** (ou **iterados**) que são casos particulares de limites relativos. Tem-se:

– *Limites sucessivos* (ou *iterados*):

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right] \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right],$$

cada um constituído por dois limites sucessivos numa só variável;

– *Limites direccionais*:

- * se o caminho é uma recta não-vertical de declive m que passa no ponto (a, b) , então o limite direccional é

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ y = m(x - a) + b}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, m(x - a) + b),$$

um limite numa só variável (x);

- * se o caminho é uma parábola de eixo vertical que tem o ponto (a, b) como vértice, então o limite direccional é

$$, \quad \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ y = k(x - a)^2 + b}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, k(x - a)^2 + b)$$

um limite numa só variável (x);

- * se o caminho é uma parábola de eixo horizontal que tem o ponto (a, b) como vértice, então o limite direccional é

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ x = k(y - a)^2 + b}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} f(k(y - a)^2 + b, y),$$

um limite numa só variável (y).

- * se o caminho é qualquer outra curva que passe no ponto (a, b) tem-se outro limite direccional.

O cálculo destes limites, que são em número infinito, indicam acerca de um possível "candidato" a limite l (se todos são iguais) ou permitem concluir a inexistência de limite no ponto (a, b) (se existem pelo menos dois com valores diferentes).

A definição de limite exige que existam e tenham o mesmo valor todos os limites da função f restringida a qualquer um desses caminhos possíveis. Como é impossível calcular todos esses limites relativos, só o uso da definição permite concluir a existência do limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y).$$

Para tal, são fundamentais as desigualdades com módulos

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ |y| &= \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ |x \pm y| &\leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ |x^3 - y^3| &\leq (x^2 + y^2)^{3/2}, \end{aligned}$$

e as igualdades com módulos

$$\begin{aligned} |x \times y| &= |x| \times |y| \\ \left| \frac{x}{y} \right| &= \frac{|x|}{|y|}, \text{ para } y \neq 0. \end{aligned}$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação dos domínios D_f e D_g . Se existirem os limites $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)$ então:

– limite da soma e da diferença de funções

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \pm g)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \pm \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y);$$

– limite do produto de funções

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \times g)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \times \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y);$$

- limite do produto de uma função por uma constante $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (k \cdot f)(x, y) = k \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y);$$

- limite do quociente de funções

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f}{g}(x, y) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)}$$

sempre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \neq 0$ e $g(x, y) \neq 0$ para todo o $(x, y) \in D_g$.

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de D_f . A função f diz-se **contínua no ponto** (a, b) se e só se são verificadas as três condições seguintes:

- existe a imagem $f(a, b)$, ou seja, $(a, b) \in D_f$;
- existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$;
- são iguais os elementos garantidos em **i.** e **ii.**, isto é,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

A função diz-se **contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

A continuidade de f no ponto (a, b) traduz-se no essencial por: "sempre que se tomam objectos (x, y) suficientemente próximos de (a, b) obtêm-se valores $f(x, y)$ das imagens tão próximos de $f(a, b)$ quanto se queira".

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de D_f . A função f diz-se **prolongável por continuidade no ponto** (a, b) (ou que f tem no ponto (a, b) uma descontinuidade removível) se e só se são verificadas as duas condições seguintes:

- $(a, b) \notin D_f$ (logo não existe a imagem $f(a, b)$);
- existe com valor finito (como número real) o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y).$$

Seja l o valor deste limite.

Define-se a função f^* , designada por **prolongamento por continuidade de f ao ponto (a, b)** , por

$$f^*(x, y) \equiv \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D_f \\ l & \text{se } (x, y) = (a, b) \end{cases}$$

com domínio $D_{f^*} = D_f \cup \{(a, b)\}$. Note-se que $D_{f^*} \neq D_f$, pois $D_{f^*} = D_f \cup \{(a, b)\}$ e $(a, b) \notin D_f$.

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de D_f . A função f diz-se **descontínua no ponto (a, b)** se f não é contínua nem prolongável por continuidade nesse ponto. Neste caso, o ponto (a, b) diz-se um **ponto de descontinuidade** da função f .
- Qualquer função polinomial é uma função contínua, independentemente do número de variáveis. Tais funções podem ser designadas por funções elementares.
- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D_f \cap D_g$. Se f e g são contínuas no ponto (a, b) então são contínuas nesse ponto as funções $|f|$, $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $k \cdot f$ (para $k \in \mathbb{R}$) e $\frac{f}{g}$ se $g(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in D_g$.
- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ funções tais que $f(D_f) \subset D_g$ (portanto a função composta $g \circ f$ está bem definida) e $(a_1, \dots, a_n) \in D_f$. Se f é contínua no ponto $(a_1, \dots, a_n)$ e g é contínua em $f(a_1, \dots, a_n)$ então a função composta $g \circ f$ também é contínua em $(a_1, \dots, a_n)$.

CASO PARTICULAR: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g, h : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(D) \times h(D) \subset D_f$ e $(a, b) = (g(c), h(c)) \in g(D) \times h(D) \subset D_f$ um ponto obtido a partir do valor real $c \in D$. Se f é contínua no ponto (a, b) e g e h são contínuas em c então a função composta F definida por

$$F(t) = f(g(t), h(t))$$

também é contínua em c .

CASO PARTICULAR: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g, h : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(D) \times h(D) \subset D_f$ e $(a, b) = (g(c, d), h(c, d)) \in g(D) \times h(D) \subset D_f$ um ponto obtido a partir do ponto $(c, d) \in D$. Se

f é contínua no ponto (a, b) e g e h são contínuas em (c, d) então a função composta F definida por

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$$

também é contínua em (c, d) .

2.1 Exercícios Propostos

1. Calcule os valores de $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que seja contínua em $x = 0$ a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha + \beta & \text{se } x = 0 \\ \frac{\exp(\alpha x) - \cos x}{\beta x + x \sin x} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

2. Seja a função $f(x, y) = \frac{x+y}{6x-y^2}$. Calcule o limite de f no ponto $(1, 2)$.

3. Seja f a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Estude o limite de f na origem dos eixos.

4. Estude a existência do limite da função definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

no ponto $(0, 0)$.

5. Verifique se a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & \text{se } (x, y) \text{ tal que } x \neq \pm y \\ 1 & \text{se } (x, y) \text{ tal que } x = \pm y \end{cases}$$

tem limite no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

6. Estude a continuidade da função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

7. Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^3}{x^4 + y^8} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Averigüe se a função f é contínua no ponto $(0, 0)$.

8. Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } xy < 0 \\ \ln(xy + 1) & \text{se } xy \geq 0 \end{cases}.$$

Averigüe a continuidade de f em pontos do eixo dos xx com abscissa positiva.

9. Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Existe algum valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é contínua? Justifique.

10. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Estude a continuidade da função f na origem.

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Estude a continuidade da função f na origem.

12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^n + py}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

onde n é um número natural e p um número real. Mostre que a função f é contínua em $(0, 0)$ se e só se $n \geq 2$ e $p = 0$.

13. Verifique se é contínua na origem dos eixos a função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 4y^2}{x^2 - 5y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

14. Estude da continuidade da função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y-2}{x+3} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

15. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f \equiv \begin{cases} z_1 = \frac{x-4}{2y+2} \\ z_2 = \frac{y-3}{x^2+1} \end{cases},$$

estude-a quanto à continuidade no ponto $(0, 0)$.

16. Diga, justificando, se é prolongável por continuidade no ponto $(0, 0)$ a função

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

17. Estude a continuidade da função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + y^2}{x^4 + y^4} & , \quad x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0 & , \quad x^4 + y^4 = 0 \end{cases}.$$

18. Seja f a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Estude-a quanto à continuidade.

19. Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y + x \sin x} & \text{se } (x, y) \text{ tal que } y \neq -x \sin x \\ 1 & \text{se } (x, y) \text{ tal que } y = -x \sin x \end{cases}.$$

Prove que a função f não é contínua em $(0, 0)$.

3 Derivadas e Diferenciais de 1ª Ordem

- Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é um **ponto interior** a D se existe uma bola aberta $B_\varepsilon(a, b)$ de centro em (a, b) e raio ε contida em D , ou seja,

$$\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(a, b) \subset D.$$

O conjunto de todos os pontos interiores ao conjunto D designa-se por **interior de D** e denota-se por $Int(D)$. O conjunto D diz-se **aberto** se todos os seus pontos são interiores, $D = Int(D)$.

Assim, um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é interior ao conjunto D se lhe pertence e também pertencem a D todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ "suficientemente próximos" de (a, b) .

- Numa função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$ cada uma das variáveis x e y é uma variável independente (z é a variável dependente na função f). Como tal, é possível variar x mantendo y como constante, e vice-versa. É o que se pretende com a seguinte definição de derivada parcial.

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . A **derivada parcial de primeira ordem da f em ordem a x no ponto (a, b)** , que se denota por $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ (ou $f'_x(a, b)$), é dada pelo limite (em $\mathbb{R}$)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}.$$

Analogamente, a **derivada parcial de primeira ordem da f em ordem a y no ponto (a, b)** , que se denota por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ (ou $f'_y(a, b)$), é dada pelo limite (em $\mathbb{R}$)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}}.$$

- Estas derivadas parciais possuem uma interpretação geométrica simples. Considere curvas sobre a superfície do gráfico da função $z = f(x, y)$ que resultam de cortes sobre essa superfície por planos verticais que passem no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Seja C_1 a curva paralela ao plano xOz que resulta da intersecção da superfície do gráfico da função $z = f(x, y)$ com o plano vertical $y = b$ (é a curva em que o plano vertical $y = b$ "corta" a superfície do gráfico). Assim, a derivada parcial de f no ponto (a, b) em ordem a x é o declive da recta tangente a esta curva C_1 em $x = a$. Sobre a curva C_1 a função $z = f(x, y)$ não varia com y ($y = b$, pois C_1 é o gráfico da função de uma variável $z = f(x, b)$ em que se considera y constante igual a b) o que mostra que a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

mede a taxa de variação de f no ponto (a, b) na direcção e sentido do eixo dos xx (por unidade de comprimento), ou seja, mede a taxa de variação de f quando se atribui um "acrécimo" ao ponto (a, b) na 1ª coordenada.

Por outro lado, seja C_2 a curva paralela ao plano yOz que resulta da intersecção da superfície do gráfico da função $z = f(x, y)$ com o plano vertical $x = a$ (é a curva em que o plano vertical $x = a$ "corta" a superfície do gráfico). Assim, a derivada parcial de f no ponto (a, b)

em ordem a y é o declive da recta tangente a esta curva C_2 em $y = b$. Sobre a curva C_2 a função $z = f(x, y)$ não varia com x ($x = a$, pois C_2 é o gráfico da função de uma variável $z = f(a, y)$ em que se considera x constante igual a a) o que mostra que a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

mede a taxa de variação de f no ponto (a, b) na direcção e sentido do eixo dos yy (por unidade de comprimento), ou seja, mede a taxa de variação de f quando se atribui um "acrécimo" ao ponto (a, b) na 2ª coordenada.

- Em muitas situações, o cálculo da derivada parcial em ordem a x num ponto (a, b) é feito pelas muitas regras usuais de derivação ordinária considerando a variável y como constante (após obter a expressão geral da derivada parcial calcula-se o seu valor para $(x, y) = (a, b)$). Analogamente para o cálculo da derivada parcial em ordem a y num ponto (a, b) . No entanto, quando a função f é definida por imposição no ponto (a, b) ou (a, b) é um ponto que pertence à "curva de mudança de ramos", apenas é possível o cálculo directo pela definição.
- A existência de derivadas parciais de primeira ordem de valor finito de f num ponto (a, b) não implica a continuidade de f nesse ponto (no entanto implica continuidade relativamente a essa variável). Considere as seguintes proposições relativas à continuidade.

PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se as duas funções derivadas parciais de primeira ordem de f existem e são limitadas nos pontos (x, y) de uma bola centrada em (a, b) então a função f é contínua no ponto (a, b) .

PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se as duas funções derivadas parciais de primeira ordem de f existem e são finitas no ponto (a, b) e todas, excepto uma, são limitadas nos pontos (x, y) de uma bola centrada em (a, b) então a função f é contínua no ponto (a, b) .

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se as duas derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a, b) existem e são finitas, define-se o **gradiente de f no ponto (a, b)** , que se denota por $\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b)$ ou $\nabla f(a, b)$ (∇ lê-se *nabla*), como sendo o

vector dessas derivadas parciais,

$$\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right).$$

O vector gradiente de f no ponto (a, b) é o vector cujas projecções sobre os eixos coordenados são as correspondentes derivadas parciais de primeira ordem de f nesse ponto (a projecção do vector gradiente sobre o eixo dos xx é a derivada parcial de primeira ordem $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e a projecção do vector gradiente sobre o eixo dos yy é a derivada parcial de primeira ordem $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$) pois

$$\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot \vec{e}_2$$

em que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

3.1 Exercícios Propostos

1. Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Calcule, por definição, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$.

2. Dada a função real f definida por

$$f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}.$$

calcule, por definição, o valor das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(2, 1)$.

3. Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

4. Dada a função real f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

calcule o valor das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ na origem.

5. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2}, & x \neq \pm y \\ 4 & x = \pm y \end{cases}.$$

Calcule o valor das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, -2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, -2)$.

6. Determine o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3y^4}{2x^3 - y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(xy) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 3 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Defina as funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

8. Seja f a função real definida por $f(x, y) = x^2y - 3y$.

- (a) Determine a expressão geral do diferencial de f .
- (b) Calcule no ponto $(4, 3)$ o acréscimo Δf e o diferencial df , para os acréscimos -0.01 e 0.02 das variáveis x e y , respectivamente.
- (c) Determine um valor aproximado da imagem $f(1.03, 1.99)$ sem aplicar directamente neste ponto a expressão que define a função f .

9. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{xy}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{\exp(x - 5y^2) - y^2}$

(c) $f(x, y) = \ln \sin \frac{x + \alpha}{\sqrt{y}}$

10. Dada a função definida por $z(x, y) = xy \tan \frac{y}{x}$, mostre que x

$$x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2z(x, y).$$

11. Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Determine a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

12. Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

determine a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

13. Calcular os diferenciais totais das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = y^2 \ln \frac{x}{y}$ para $x = y = 2$, $dx = 0.4$ e $dy = -0.3$

(b) $f(x, y) = x \sin(ax) - y \cos(by)$

(c) $z = \ln \tan \frac{y}{x}$

(d) $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y$ para $x = 3, y = 1, dx = 0.1$ e $dy = -0.2$

(e) $z = xy \exp(x - 2y)$

(f) $z = \sin^2(x) + \cos^2(y)$

14. Dada a função

$$f(x, y) = x^y + \ln^2(xy),$$

calcule o diferencial de primeira ordem desta função no ponto $(1, 1)$, para $dx = 0.01$ e $dy = -0.2$. Interprete teoricamente o resultado obtido.

15. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 4y^2}{\sqrt{x^2 + 5y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Determine df e Δf no ponto $(1, 2)$ com $dx = -0.1$ e $dy = 0.01$.

16. Seja f a função

$$f(x, y) = \sqrt[5]{x + \ln y}.$$

Calcule um valor aproximado de $f(32.1, 1.2)$.

4 Diferencialidade

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . A função f diz-se **diferenciável no ponto** (a, b) se e só se existem e são de valor finito as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ e ainda

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(x, y) - \left[f(a, b) + (x - a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right]}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0.$$

O limite anterior significa que a expressão

$$f(a, b) + (x - a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

é uma boa aproximação de $f(x, y)$ para pontos (x, y) próximos de (a, b) .

- Por outro lado,

$$z = f(a, b) + (x - a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

é a equação do plano que passa no ponto $(a, b, f(a, b))$ e que tem

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right)$$

como vector director. Assim, a diferenciabilidade de f no ponto (a, b) traduz-se geometricamente na existência de um plano, designado por **plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$** , que é uma boa aproximação da superfície definida por $z = f(x, y)$ (a superfície do gráfico da função f) numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a, b))$. O vector $\vec{n}$ é designado por **vector normal** ao plano tangente.

- A recta normal ao plano tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$ designa-se por **recta normal ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$** . Tem como vector director o vector normal $\vec{n}$.
- Considerando as mudanças de variável $x - a = h$ e $y - b = k$, a condição para diferenciabilidade de f no ponto (a, b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - (x - a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - (y - b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

traduz-se em

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Como tal, f é diferenciável no ponto (a, b) se e só se

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (1)$$

em que

$$\varepsilon(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad (2)$$

ou seja,

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \varepsilon(h, k).$$

Na prática, para estudar a diferenciabilidade de f num ponto (a, b) , obtem-se $\varepsilon(h, k)$ a partir da igualdade (2) e averigua-se se o limite em (1) é nulo.

- A existência de derivadas parciais de primeira ordem de f num ponto (a, b) interior a D_f garante a existência de duas rectas tangentes ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$, paralelas aos planos coordenados xOz e yOz . No entanto, tal não é suficiente (embora necessário) para garantir a existência de um plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$. Para tal é necessário que f seja diferenciável em (a, b) .
- Qualquer função polinomial é uma função diferenciável, independentemente do número de variáveis.
- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \text{Int}(D_f) \cap \text{Int}(D_g)$. Se f e g são diferenciáveis no ponto (a, b) então são diferenciáveis nesse ponto as funções: $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $k \cdot f$ (para $k \in \mathbb{R}$) e $\frac{f}{g}$ se $g(x, y) \neq 0$ para todo o $(x, y) \in D_g$.
- A análise do limite (igual a 0) que é exigido para a diferenciabilidade num ponto, conduz à proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior de D_f . Se a função f é diferenciável no ponto (a, b) então a aproximação

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \approx h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

é válida no cálculo de valores aproximados da função f em torno de (a, b) .

Assim, é possível calcular valores aproximados das imagens por f em pontos $(a+h, b+k)$ próximos de (a, b) a partir da imagem $f(a, b)$ e das derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a, b) ,

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Em concreto, se a função f é diferenciável no ponto (a, b) , define-se o **diferencial de primeira ordem** (ou simplesmente **diferencial**) de f no ponto (a, b) para os acréscimos h e k das variáveis x e y , que se denota por $df(a, b)$, como sendo

$$df(a, b) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

É usual a notação dx e dy (em vez de h e de k , respectivamente) para os acréscimos das variáveis x e y na expressão do diferencial de f num ponto (a, b) , ou seja, é usual considerar

$$df(a, b) = dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + dy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . A diferença

$$f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$$

designa-se por **acrécimo da função f no ponto (a, b)** relativo aos acréscimos dx e dy das variáveis x e y , respectivamente, e denota-se por Δf .

Conclui-se da Proposição acima que o diferencial de primeira ordem de f no ponto (a, b) é uma boa aproximação do acréscimo da função f no ponto (a, b) relativo aos acréscimos dx e dy das variáveis x e y , respectivamente,

$$\Delta f(a, b) = f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$$

$$\approx dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + dy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = df(a, b).$$

Esta aproximação deve entender-se do seguinte modo: se dx e dy forem acréscimos relativamente pequenos quando comparados com a e b , então $df(a, b)$ é uma boa aproximação de $\Delta f(a, b)$. Assim, o diferencial de primeira ordem de f no ponto (a, b) permite obter valores aproximados das imagens por f em pontos $(a + dx, b + dx)$ próximos de (a, b) ,

$$f(a + dx, b + dy) \approx f(a, b) + df(a, b).$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se a função f é diferenciável no ponto (a, b) então f é contínua nesse ponto.

Temos

$$\text{Diferenciabilidade em } (a, b) \implies \text{Continuidade em } (a, b).$$

A implicação inversa não é válida: existem funções contínuas num ponto sem que sejam diferenciáveis nesse ponto (a diferenciabilidade é "mais exigente" que a continuidade). No entanto, se é conhecido que determinada função não é contínua num ponto (a, b) então está garantido que ela também não é diferenciável nesse ponto,

$$\text{Descontinuidade em } (a, b) \implies \text{Não-diferenciabilidade em } (a, b)$$

(pela negação da implicação, $(D \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\sim C \Rightarrow \sim D)$).

- A existência de derivadas parciais de primeira ordem de f num ponto (a, b) interior a D_f de valor finito são condição necessária para a diferenciabilidade de f em (a, b) . No entanto, a existência de derivadas parciais de primeira ordem de f num ponto (a, b) interior a D_f de valor finito não garante, só por si, a diferenciabilidade de f em (a, b) . Note-se ainda que existência de tais derivadas parciais de valor finito nem sequer garante a continuidade de f em (a, b) .

Condição suficiente de diferenciabilidade. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se existem e são de valor finito as derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a, b) e se uma das funções $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é contínua numa bola aberta de centro (a, b) então f é diferenciável no ponto (a, b) .

PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se a função f é diferenciável no ponto (a, b) então as derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a, b) são finitas. Além disso, as funções derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são contínuas no ponto (a, b) .

4.1 Exercícios Propostos

1. Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Verifique se a função f é diferenciável na origem.

2. Dada a função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(y) + y^2 \sin x}{x^2 + y^2} & \text{se } y \neq -x^2 \\ 1 & \text{se } y = -x^2 \end{cases},$$

determine o valor das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e estude a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Considerando $\alpha = 0$, determine as derivadas parciais de 1ª ordem de f na origem.
- (b) Estude a diferenciabilidade de f na origem.
- (c) Para $\alpha = 0$, defina as derivadas parciais de 1ª ordem da função f .
4. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + x^2y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Estude a continuidade da função f no ponto $(0, 0)$

- (b) Com base no resultado da alínea a) que pode concluir quanto à diferenciabilidade da função f em $(0, 0)$? Justifique.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$.
(b) Estude a diferenciabilidade da função f na origem.

6. Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y-1} & , \quad y \neq 1 \\ 0 & , \quad y = 1 \end{cases}.$$

Mostre que a função f não é diferenciável no ponto $(2, 1)$.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \beta + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2},$$

com $\beta \in \mathbb{R}$.

- (a) Indique o domínio da função f .
(b) Mostre que $f(x, y)$ é prolongável por continuidade na origem e determine o valor a atribuir à imagem de $(0, 0)$ na função prolongamento.
(c) Estude, no ponto $(0, 0)$, a diferenciabilidade da função prolongamento definida na alínea anterior. (Nota: se não respondeu à alínea anterior, considere $f(0, 0) = \beta = 1$).

8. Considere a função real $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^n + py}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

onde n é um número natural e p um número real.

- (a) Calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.
- (b) Estude a diferenciabilidade da função f na origem.

5 Regra de Derivação da Função Composta

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ funções vectoriais tais que $f(D_f) \subset D_g$ (portanto a função composta $g \circ f$ está bem definida) e $(a_1, \dots, a_n)$ um ponto interior a D_f . Se f é diferenciável no ponto $(a_1, \dots, a_n)$ e g é diferenciável em $f(a_1, \dots, a_n) \in \text{Int}(f(D_f))$ então a função composta $g \circ f$ também é diferenciável em $(a_1, \dots, a_n)$ e é válida a **regra da cadeia** (ou **regra da função composta**) que se traduz pela seguinte igualdade entre matrizes Jacobianas (definição no Capítulo 11)

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{J}(g \circ f)(a_1, \dots, a_n)}_{\text{matriz } p \times n} = \underbrace{\mathbf{J}g(f(a_1, \dots, a_n))}_{\text{matriz } p \times m} \cdot \underbrace{\mathbf{J}f(a_1, \dots, a_n)}_{\text{matriz } m \times n}}.$$

CASO PARTICULAR: Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função vectorial de variável real diferenciável em a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de duas variáveis reais diferenciável em $(b, c) = f(a) = (f_1(a), f_2(a))$, então a função composta F definida por

$$F(t) = g(f_1(t), f_2(t)) \equiv g(u, v)$$

(representamos os argumentos $f_1(t)$ e $f_2(t)$ por u e v , respectivamente) é diferenciável em a e a sua derivada (total) é

$$\begin{aligned} F'(a) &= \frac{dF}{dt}(a) = \left[\frac{\partial g}{\partial u}(b, c) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(b, c) \right]_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(a) \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(b, c) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial t}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b, c) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial t}(a) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(b, c) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b, c) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(a). \end{aligned}$$

CASO PARTICULAR: Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função vectorial de variável real diferenciável em (a, b) e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma

função real de duas variáveis reais diferenciável em $(c, d) = f(a, b) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$, então a função composta F definida por

$$F(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y)) \equiv g(u, v)$$

(representamos os argumentos $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ por u e v , respectivamente) é diferenciável em (a, b) e é válida a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{2 \times 2},$$

sendo as derivadas parciais da primeira e da terceira matrizes calculadas no ponto (a, b) e as da segunda matriz calculadas no ponto $(c, d) = f(a, b) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial g}{\partial u}(c, d) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c, d) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(c, d) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c, d) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial g}{\partial u}(c, d) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c, d) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(c, d) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c, d) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(a, b). \end{aligned}$$

- Para cada função F que resulte da composição de outras funções é conveniente a construção de um *esquema em "árvore"* que ilustre todas as dependências entre as funções envolvidas. A leitura desse esquema permite a aplicação correcta da regra da cadeia: considera-se a soma das contribuições relativas a cada caminho e a cada um destes o produto de derivadas.

5.1 Exercícios Propostos

1. Considere a função composta

$$f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$$

em que $x = t^2 - 3t$ e $y = \ln t$. Determine a expressão da derivada (total) $f'(t)$.

2. Use a regra da cadeia para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo

$$f = (x^2 + y^2) \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3. Considere $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + cy^2$, com $x = uv$, $y = \ln(u) - \sqrt{v}$, $u = s^2$ e $v = s + 1$. Obtenha a derivada $f'(s)$.
4. Mostre que a função $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ verifica a equação

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

qualquer que seja a função f .

5. Use a regra da cadeia para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo

$$f = \ln \left(xy^2 + x^2y + \sqrt{1 + (xy^2 + x^2y)^2} \right).$$

6. Sendo $z = f(u, v)$ com $u = x^2 - y^2$ e $v = \exp(xy)$, determine a expressão de cada uma das derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.
7. Demonstre que para a função $z = yf(x^2 - y^2)$ se tem

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{z(x, y)}{y^2}.$$

8. Dada a função

$$z(x, y) = x^\alpha g\left(\frac{y}{x}\right),$$

com α constante, determine a expressão de $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

9. Sendo

$$U(x, y, z) = x - \sin(y) + 2z$$

com $x = 2v + t$, $y = \ln v$, $z = t^v$, $t = \sec w$ e $v = \sec(w^2)$, determine a expressão da derivada (total) $\frac{dU}{dw}(w)$ (Nota: indique apenas os cálculos).

10. Seja

$$z(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$$

com $x = t^2 - 3t$ e $y = \ln t$. Determine a expressão da derivada (total) $\frac{dz}{dt}$ (Nota: indique apenas os cálculos).

11. Para $V(x, y, z) = xy^2h\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, mostre que

$$x \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = 3V.$$

6 Derivada Direccional e Dirigida

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais, (a, b) um ponto de $\mathbb{R}^2$ interior a D_f e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vector não-nulo de $\mathbb{R}^2$. A **derivada direccional de f no ponto (a, b) segundo o vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$** , que se denota por $f'_{(v_1, v_2)}(a, b)$ (ou $f'_{\vec{v}}(a, b)$) é definida pelo limite (em $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f'_{(v_1, v_2)}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + h \cdot (v_1, v_2)) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv_1, b + hv_2) - f(a, b)}{h}. \end{aligned}$$

Quando se considera o versor de $\vec{v}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{vers}(\vec{v}) &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\|(v_1, v_2)\|} \cdot (v_1, v_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \cdot (v_1, v_2) = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right), \end{aligned}$$

temos o caso particular de derivada dirigida.

- Se $\vec{v} = \vec{e}_1 = (1, 0)$, o primeiro vector da base canónica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\begin{aligned} f'_{\vec{e}_1}(a, b) &= f'_{(1, 0)}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + h \cdot (1, 0)) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \end{aligned}$$

que mede a taxa de variação de f no ponto (a, b) na direcção e sentido do eixo dos xx (por unidade de comprimento visto que o vector $\vec{v} = \vec{e}_1 = (1, 0)$ é unitário). Analogamente, se $\vec{v} = \vec{e}_2 = (0, 1)$, o segundo vector dessa base, tem-se

$$\begin{aligned} f'_{\vec{e}_2}(a, b) &= f'_{(0,1)}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + h \cdot (0, 1)) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \end{aligned}$$

que mede a taxa de variação de f no ponto (a, b) na direcção e sentido do eixo dos yy (por unidade de comprimento visto que o vector $\vec{v} = \vec{e}_2 = (0, 1)$ é unitário).

Enquanto pelas derivadas parciais de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

se faz, respectivamente, variar x mantendo y como constante e vice-versa, através da derivada direcciona é possível considerar ambas as variáveis x e y a variar simultaneamente.

- Se a função f é diferenciável no ponto (a, b) , e não é definida por imposição nesse ponto, então

$$f'_{(v_1, v_2)}(a, b) = (v_1, v_2) | \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b),$$

para todo o vector $\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1 \cdot (1, 0) + v_2 \cdot (0, 1)$. A fórmula anterior pode reescrever-se como

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = f'_{(v_1, v_2)}(a, b) = \|(v_1, v_2)\| \cdot \left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\| \cdot \cos \theta$$

em que θ é o menor ângulo entre os vectores

$$\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \neq \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{v} = (v_1, v_2) \neq \vec{0}$$

(também válida em $\mathbb{R}^3$).

Quando $\|\vec{v}\| = \|(v_1, v_2)\| = 1$ tem-se apenas

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = f'_{(v_1, v_2)}(a, b) = \left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\| \cdot \cos \theta.$$

Neste caso, e considerando $\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \neq \vec{0}$, a derivada dirigida $f'_{\vec{v}}(a, b)$:

- é igual a 0 quando o vector $\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b)$ e o vector unitário $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ são ortogonais, pois neste caso $\cos \theta = 0$ (visto que $\theta = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$);
- atinge o valor máximo igual a $\left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|$,

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a, b) = f'_{(v_1, v_2)}(a, b) = \left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|},$$

quando $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ é o vector unitário paralelo e com o mesmo sentido do vector $\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b)$,

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = \frac{\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b)}{\left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|},$$

pois 1 é o valor máximo de $\cos \theta$ e é obtido quando $\theta = 0^\circ$ ($\theta = 0 \text{ rad}$);

- atinge o valor mínimo igual a $-\left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|$,

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a, b) = f'_{(v_1, v_2)}(a, b) = -\left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|},$$

quando $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ é o vector unitário paralelo e com sentido oposto ao vector $\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b)$,

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = -\frac{\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b)}{\left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|},$$

pois -1 é o valor mínimo de $\cos \theta$ e é obtido quando $\theta = 180^\circ$ ($\theta = \pi \text{ rad}$).

Como tal, a taxa de variação de f no ponto (a, b) é máxima (respectivamente, mínima) na direcção e sentido do vector unitário (único) $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ que tenha a mesma direcção e o mesmo sentido do (respectivamente, sentido oposto ao) vector $\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b)$.

EXEMPLO: Suponha que uma certa função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem num certo ponto (a, b) o vector gradiente $(3, 4)$, $\overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) = (3, 4)$. O vector unitário $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ com a mesma direcção e sentido do vector gradiente $(3, 4)$ é

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right),$$

pois $\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Como tal, a taxa de variação máxima de f no ponto (a, b) é 5, dada pela derivada dirigida

$$\begin{aligned} f'_{(3/5, 4/5)}(a, b) &= \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \Big| (3, 4) = \frac{3}{5} \cdot 3 + \frac{4}{5} \cdot 4 \\ &= \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5 = \left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|. \end{aligned}$$

O vector unitário $\vec{v}' = (v'_1, v'_2)$ com a mesma direcção e sentido oposto ao vector gradiente $(3, 4)$ é

$$\vec{v}' = (v'_1, v'_2) = -(v_1, v_2) = -\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right).$$

Como tal, a taxa de variação mínima de f no ponto (a, b) é -5 , dada pela derivada dirigida

$$\begin{aligned} f'_{(-3/5, -4/5)}(a, b) &= \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \Big| (3, 4) = \left(-\frac{3}{5} \right) \cdot 3 + \left(-\frac{4}{5} \right) \cdot 4 \\ &= -\frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -5 = -\left\| \overrightarrow{\text{grad } f}(a, b) \right\|. \end{aligned}$$

- Considere $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Se é conhecido o ângulo α que um vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ faz com a parte positiva do eixo dos xx então são válidas as relações

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}.$$

Como tal, é possível estabelecer a proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) um ponto de $\mathbb{R}^2$ interior a D_f e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vector não-nulo de $\mathbb{R}^2$. Suponha ainda que a função f é diferenciável no ponto (a, b) e não é definida por imposição nesse ponto. Se α é o ângulo que o vector $\vec{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx então a derivada direcciona $f'_{\vec{v}}(a, b)$ pode ser calculada por

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = f'_{(v_1, v_2)}(a, b) = \cos \alpha \cdot \|\vec{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \sin \alpha \cdot \|\vec{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é o caso particular de um vector unitário então a derivada dirigida $f'_{\vec{v}}(a, b)$ pode ser calculada por

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = f'_{(v_1, v_2)}(a, b) = \cos \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \sin \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

6.1 Exercícios Propostos

1. Considere a função f definida por $f(x, y) = \sin(xy) + xy^2 + 3x$.
 - (a) Determine a derivada direccional de f no ponto $(0, 0)$ segundo o vector $\vec{v} = (1, -1)$;
 - (b) Calcule a derivada dirigida no mesmo ponto segundo a mesma direcção e sentido.
2. Dada a função f definida por $f(x, y) = \sin(xy) + xy^2$, calcule a derivada direccional de f no ponto $(0, 0)$ segundo a direcção do vector $\vec{v} = (1, 2)$.

3. Considere a função f definida por

$$f(x, y) = xy \sin \frac{x}{y}.$$

- (a) Determine o vector gradiente de f no ponto $(0, 1)$;
 - (b) Determine a derivada dirigida de f no ponto $(0, 1)$ segundo o vector $\vec{v} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.
4. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^4} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calcule a derivada direccional de f no ponto $(0, 0)$ segundo a direcção do vector $\vec{u} = (a, b)$, com $a \neq 0$.

5. Determinar a derivada dirigida da função $f(x, y) = y \exp x$ no ponto $(0, 3)$ na direcção que faz os seguintes ângulos com a parte positiva do eixo $0x$:
 - (a) 30°
 - (b) 120°
6. Calcule a derivada dirigida da função $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ no ponto $P(2, 1)$ segundo a direcção da recta que une o ponto P ao ponto $Q(5, 5)$.

7. Calcular a derivada dirigida da função $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (a) nos pontos (x, y) da semi-recta $y = x$, com $x > 0$ e $y > 0$, segundo a direcção desta semi-recta;
 - (b) na direcção do raio e na direcção da recta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$.
8. Determine o vector gradiente das seguintes funções:
- (a) $f(x, y) = y^2 \ln \frac{x}{y}$ para $x = y = 2$
 - (b) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 3y$ no ponto (x, y) em que as derivadas parciais de 1ª ordem são nulas.
9. Dada a função $f(x, y) = \exp(x) + \exp(y)$, calcule a derivada dirigida da função f no ponto $(1, 0)$ na direcção em que é máxima.
10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y \sin^2(x) + x^2 y$.
- (a) Determine o vector $\vec{v}$ para o qual a derivada dirigida da função f é dada pela expressão $f'_{\vec{v}}(x, y) = \sin^2(x) + x^2$;
 - (b) Verifique que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sin^2(x) + x^2$ é de classe C^∞ e mostre que

$$\frac{d^5 g}{dx^5}(x) = g^{(5)}(x) = 16 \sin(2x).$$

11. Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x \sin^2(y) + xy^2$. Diga, justificando, em que direcção $\vec{u}$ é que a derivada dirigida da função é dada pela expressão

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = \sin^2(y) + y^2.$$

7 Função Homogénea

- Seja α um número racional ($\alpha \in \mathbb{Q}$). Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **homogénea de grau α** se e só se verifica a igualdade

$$f(t \cdot x_1, t \cdot x_2, \dots, t \cdot x_n) = t^\alpha \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Prova-se ainda que se f é homogênea de grau α então todas as suas derivadas parciais de primeira ordem são homogêneas de grau $\alpha - 1$.
- Qualquer função homogênea de grau α verifica a **Identidade de Euler**

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \cdot f(x, y).$$

7.1 Exercícios Propostos

1. Mostre que as seguintes funções são homogêneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique ainda a Identidade de Euler:

(a) $f(x, y) = \ln \frac{(x+y)^2}{xy}$

(b) $f(x, y, z) = \sin \frac{x+y}{z}$

(c) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$

(d) $f(x, y, z) = y \frac{x+y+z}{x-z}$

(e) $f(x, y) = \left(\frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4} \right)^{1/2}$

(f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2 (\ln x - \ln y)$. Averigüe se a função f é homogênea e, no caso afirmativo, verifique a Identidade de Euler.
3. Considere a função homogênea $f(x, y) = Ax^\alpha y^\beta$.

- (a) Verifique que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = (\alpha + \beta) \cdot f(x, y).$$

O que conclui? Justifique a sua resposta.

- (b) Mostre, por definição, que a função $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é homogênea de grau $\alpha + \beta - 1$.

4. Seja f a função

$$f(x, y) = (3x^{-\alpha} + 5y^{-\alpha})^{-1/6}.$$

- (a) Determine o valor do parâmetro real α para o qual a função f é homogênea de grau $1/2$.
- (b) Verifique a Identidade de Euler considerando o valor de α obtido na alínea a).

5. Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^b}{y^a} + x^2y + \frac{y^{2a}}{x^b}$$

sendo a e b parâmetros reais.

- (a) Calcule os valores de a e de b de modo que a função f seja homogênea.
- (b) Para os valores de a e b obtidos na alínea a), qual o grau de homogeneidade da função f ?

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \exp\left(\frac{x}{y}\right) - g\left(\frac{y-x}{x}\right)$$

onde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 .

- (a) Averigüe se a função f é homogênea.
- (b) Calcule a derivada dirigida de f no ponto $(1, 1)$ segundo o vector $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
- (c) Admitindo que $g'(0) = 1$, determine o vector gradiente de f no ponto $(1, 1)$.

7. Sendo

$$g(x, y) = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

em que f é uma função diferenciável no seu domínio, mostre que

$$x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) + z \frac{\partial g}{\partial z}(x, y) = n \cdot g(x, y)$$

- (a) aplicando a Identidade de Euler
- (b) pela regra de derivação da função composta.

8. Seja f a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 + x^\alpha y^\beta}{y^\beta + x^\gamma} + x^\alpha \sin \frac{x}{y}.$$

- (a) Determine os valores dos parâmetros reais α , β e γ de modo que a função seja homogênea, indicando o respectivo grau.
- (b) Verifique, para os valores paramétricos obtidos na alínea a), a Identidade de Euler.

9. Estude a homogeneidade da função

$$g(x, y, z) = x^2 + x^\alpha y^{\beta-3} - z^{3\alpha} y^\beta$$

em função dos parâmetros reais α e β :

- (a) recorrendo directamente à definição;
- (b) utilizando a Identidade de Euler.

10. Considere a função

$$h(x, y) = \frac{x^2}{y^{\beta-\alpha}} + 5x^\beta y^{3/2} + \frac{\sqrt{y}}{6}.$$

Indique para que valores de α e β a função h é homogênea.

11. Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^\alpha + x^{\gamma-1}}{y^{2-\beta}}.$$

Determine os valores de α , β e γ de modo que a função f seja homogênea de grau 1.

12. A função $z(x, y) = x^2 g\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$ verifica a equação

$$x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2z(x, y).$$

Como interpreta esta igualdade em termos de homogeneidade?

13. Seja $f(x, y)$ uma função homogênea do 2º grau. Considere ainda a função $g(x, y) = xf(x, y)$.

- (a) Qual o grau de homogeneidade da função g ?
- (b) Mostre que as derivadas parciais g'_x e g'_y são funções homogêneas do 2º grau.
- (c) Mostre que a função g verifica a Identidade de Euler.

14. Prove que toda a função do tipo

$$z(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

é homogênea de grau 0. Verifique a Identidade de Euler para essas funções.

15. Considere a função $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$

- (a) Prove que a função f é homogênea e indique o grau de homogeneidade;
- (b) Verifique a Identidade de Euler para a função f .

16. Sem calcular as derivadas parciais, prove que

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

sabendo que $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$ e supondo que esta função é diferenciável.

17. Considere as funções

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Mostre que f e g são funções homogêneas e verifique os teoremas que conhece sobre funções homogêneas.

18. Para

$$f(x, y) = x^k y^{2+k} + yx,$$

utilize a Identidade de Euler para determinar k de modo que a função f seja homogênea. Determine ainda o seu grau de homogeneidade.

19. Sendo

$$f(x, y) = \frac{x^a}{y^b} + xy^3 + \frac{y^{b-1}}{x},$$

calcule a e b de modo a que a função seja homogénea. Indique ainda o respectivo grau de homogeneidade.

20. Considere a função $f(x, y) = (5x^k + 2y)^2$.

- (a) Determine para que valores de k esta função é homogénea e qual o seu grau de homogeneidade.
- (b) Para o valor de k obtido na alínea a), prove a Identidade de Euler para a função f , verificando também que as derivadas parciais de 1ª ordem da função são funções homogéneas.

21. Dada a função

$$z(x, y) = 2x^2 \ln \left(\alpha^{1/x^2} \right) - 6y^3 \ln \left(b^{1/y^3} \right),$$

- (a) verifique se a função é homogénea e, em caso afirmativo, diga qual o grau de homogeneidade;
- (b) interprete o significado do grau de homogeneidade de uma função, utilizando o resultado da alínea anterior.

22. A função $z(x, y, t) = y^3 f \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{x} \right)$ verifica a igualdade

$$x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y, t) + y \frac{\partial z}{\partial y}(x, y, t) + t \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, t) = 3z(x, y, t).$$

Como interpreta esta igualdade em termos de homogeneidade?

23. Considere a função $z(x, y) = ax^u y^v$.

- (a) Demonstre que a função verifica a igualdade

$$x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = (u + v) z(x, y).$$

- (b) Como interpreta a igualdade anterior? Justifique, efectuando os cálculos necessários.

24. Considere a seguinte função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{se } x+y > 0 \\ \frac{x^2+y^2}{x+y} & \text{se } x+y \leq 0 \end{cases}.$$

Determine o grau de homogeneidade de f , para $x+y \leq 0$.

25. Seja f a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3y^2-x} & \text{se } x \neq 3y \\ 0 & \text{se } x = 3y \end{cases}.$$

Averigue se f é homogênea para $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 3y\}$. Justifique.

26. Considere a função

$$z(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x} f\left(\frac{x^2 - y^2}{x}\right)$$

em que f é uma função homogênea de grau 1.

- (a) Qual o grau de homogeneidade de z .
- (b) Mostre que z verifica Identidade de Euler.

27. Considere a função

$$f(x, y, z) = x^2 z + \left(\frac{x^a}{y^4}\right)^{1/4} + \frac{y^b}{x}.$$

- (a) Determine o domínio de definição da função f ;
- (b) Determine os valores de a e de b que tornam f uma função homogênea e, considerando esses valores, verifique a Identidade de Euler.

28. Sendo

$$f(x, y) = x^k y^{k+1} + x^2 y$$

(k número inteiro), utilize a Identidade de Euler para determinar k de modo que f seja homogênea e determine o seu grau de homogeneidade.

29. Considere a seguinte função de produção

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha},$$

com $k > 0$ e $L > 0$. Trata-se da função de Cobb-Douglas com dois factores de produção, o capital K e o trabalho L .

- (a) Determine o grau de homogeneidade da função de Cobb-Douglas;
- (b) Supondo $\alpha = 0.75$, verifique a Identidade de Euler;
- (c) Prove que a produtividade marginal do capital, $\frac{\partial Y}{\partial K}$, é homogénea de grau 0.

30. Sabendo que

$$v(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right),$$

em que f é uma função diferenciável, aplique a Identidade de Euler para mostrar que

$$x \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + z \frac{\partial v}{\partial z}(x, y) = nv(x, y).$$

31. Sendo f uma função diferenciável e homogénea de grau 1, prove que a função.

$$g(x, y) = xf\left(x - y, \frac{y^2 - x^2}{y}\right)$$

verifica a seguinte igualdade $x = 2g(x, y)$. Comente o resultado obtido.

32. Seja F a função

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y}{3}\right)^n + \left(\frac{z}{3}\right)^x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Verifique se a função F é homogénea. Em caso afirmativo, determine o seu grau de homogeneidade.

33. Seja $z = f(u, v)$ uma função composta em que $u = x^3$ e $v = x^2y$. Sabe-se que $f(u, v)$ é uma função homogénea de grau 2 e de classe C^2 . Considere ainda que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(8, 4) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(8, 4) = 2.$$

- (a) Calcule o valor de $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1)$ e de $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 1)$.
- (b) Determine $f(8, 4)$.
- (c) Qual o valor da derivada de z , no ponto $(x, y) = (2, 1)$ segundo a direção do vector $(-1, 0)$? Como se denomina esta derivada?

(Chapter head:)Derivadas e Diferenciais de Ordem Superior à Primeira

8 Derivadas Parciais de Ordem Superior

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Admitamos que as duas derivadas parciais de primeira ordem têm valor finito num ponto (a, b) . É possível averiguar a existência de derivadas parciais de segunda ordem de f em (a, b) . As derivadas parciais de segunda ordem (cujo cardinal será 4 ou inferior) resultam de derivar (mais uma vez) as duas derivadas parciais de primeira ordem em relação a cada uma das variáveis x e y .

Em concreto, definem-se as quatro derivadas parciais de segunda ordem de f no ponto (a, b) como as derivadas parciais de primeira ordem da função $\frac{\partial f}{\partial x}$, que são

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = f''_{xx}(a, b) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a + h, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{h}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = f''_{xy}(a, b) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{h},$$

bem como da função $\frac{\partial f}{\partial y}$, a saber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = f''_{yx}(a, b) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{h}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = f''_{yy}(a, b) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b + h) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{h}.$$

As derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

são designadas por **derivadas mistas (cruzadas ou rectangulares) de segunda ordem**.

- De modo análogo, é possível considerar sucessivamente derivadas parciais de ordem superior por derivação das derivadas parciais de ordem imediatamente inferior. Existem $2^3 = 8$ derivadas parciais de terceira ordem, $2^4 = 16$ derivadas parciais de quarta ordem e, genericamente, 2^k derivadas parciais de ordem k .
- Tal como para as derivadas parciais de primeira ordem deve-se, sempre que permitido, recorrer às regras de derivação usuais no cálculo das derivadas parciais de ordem superior.
- Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **de classe C^k num conjunto aberto** A contido em D_f , com $k \in \mathbb{N}_0$, se admite derivadas parciais contínuas em todos os pontos de A até à ordem k (inclusive). Escreve-se $f \in C^k(A)$ ou simplesmente $f \in C^k$. Se $f \in C^k(A)$ com k tão grande quanto se queira, f diz-se **de classe $C^\infty(A)$** e escreve-se $f \in C^\infty(A)$.
Em particular, dado um conjunto aberto $A \subset D_f$, f é de classe C^0 em A se é contínua nos pontos de A , f é de classe C^1 em A se é contínua e admite derivadas parciais de primeira ordem contínuas nos pontos de A , f é de classe C^2 em A se é contínua e admite derivadas parciais de primeira e de segunda ordem contínuas nos pontos de A . A função f é de classe C^2 em A se as derivadas parciais de f de primeira ordem forem de classe C^1 . Atendendo à condição suficiente de diferenciabilidade, se f é de classe C^1 numa bola aberta centrada em (a, b) então f é diferenciável em (a, b) .
- Considere o seguinte teorema que garante a igualdade das derivadas parciais mistas de segunda ordem sob certas condições.

Teorema de Schwartz. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se existem e são contínuas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ em todos os pontos (x, y) de uma bola aberta centrada em (a, b) e a função $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua no ponto (a, b) então também

existe a derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ e

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)}.$$

Em particular, quando f é de classe C^2 é válido o Teorema de Schwartz. Tomando condições análogas às do teorema anterior, mantém-se válida a igualdade de derivadas parciais mistas de ordem superior à segunda, mesmo que seja distinta a sequência (ordem) de derivação, mas desde que seja preservado o número de vezes que se deriva em ordem a cada uma das variáveis. Por exemplo, é válida a relação

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(a, b)$$

entre derivadas mistas, para condições semelhantes às do teorema anterior. Mais geralmente, se f é de classe C^k então é indiferente a sequência (ordem) de derivação até à ordem k , apenas há que atender ao número de vezes que se deriva em ordem a cada variável.

- **Teorema de Young (formulação 1).** Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se existem as derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em todos os pontos (x, y) de uma bola aberta centrada em (a, b) e são diferenciáveis em (a, b) então é válida a igualdade

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)}.$$

Teorema de Young (formulação 2). Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se existem as derivadas parciais de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em todos os pontos (x, y) de uma bola aberta centrada em (a, b) e são contínuas em (a, b) então é válida a igualdade

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)}.$$

Note-se que a diferenciabilidade das funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto (a, b) garante a existências das derivadas parciais de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$.

8.1 Exercícios Propostos

1. Mostre que se $z(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ então $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = 0$.
2. Dada a função $g(x, y) = 2xy^2 + 4 \ln(4x^3)$ determine, pela definição, a expressão da derivada parcial de 2ª ordem $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$.
3. Calcule o valor das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ sendo f a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(x - y)}{x + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

4. Para a função $z(x, y) = y^2 \exp(x) + x^2 y^3 - 1$, determine a expressão das derivadas parciais de 3ª ordem $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$ e $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(x, y)$.
5. Dada a função $g(x, y) = [\exp(x) + \sin(x)] \ln y$, determine as derivadas parciais $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$ e $\frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x \partial y}(x, y)$.
6. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & \text{se } x \neq \pm y \\ 0 & \text{se } x = \pm y \end{cases}.$$

Calcule o valor das derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$.

7. Considere a função real $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Defina as funções $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.
Investigue se são válidas as hipóteses do teorema de Schwartz.

(b) Estude a diferenciabilidade da função f na origem.

8. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2 (\ln x - \ln y)$.
Tratando-se de uma função homogênea de grau 2, é válida a Identidade de Euler

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x, y).$$

Mostre que:

$$(a) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(2-1)f(x, y);$$

$$(b) \quad x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3x^2y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 2(2-1)(2-2)f(x, y).$$

9. Sendo $h(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x + y}$, prove que

$$x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \frac{\partial h}{\partial x}(x, y).$$

Interprete esta igualdade com base na Identidade de Euler.

10. Dada a função $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$, calcule todas as derivadas parciais de 2ª ordem de f .

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}.$$

- (a) Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$ enquanto $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$.
- (b) Indique uma hipótese do Teorema de Schwartz que não é verificada pela função f .

12. Considere a função F definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} & \text{se } (x, y) \neq (0, y) \\ \frac{\pi}{2} y^2 & \text{se } (x, y) = (0, y) \end{cases}.$$

Calcule as segundas derivadas mistas de F na origem. Que pode afirmar sobre a continuidade de $F''_{xy}(x, y)$ na origem?

13. Determine $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ sendo f a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(y - x)^2 + x^2 y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

14. Para a função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \ln(x - y) & \text{se } y \neq x \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ nos pontos (a, b) do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ e ainda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

15. Considere a função $f(x, y) = x^\delta + 4xy + 4y^{\epsilon-1}$.

- (a) Prove que f é homogênea, e discuta o seu grau de homogeneidade em função de δ e ϵ .
- (b) Para os valores determinados na alínea anterior, demonstre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ verifica a Identidade de Euler e comente o resultado.

16. Seja $z(x, y) = ax^u y^v$. Prove a igualdade

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = (u + v - 1) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$$

e comente o segundo membro tendo em conta a Identidade de Euler.

17. Seja $f(x, y)$ uma função homogênea de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2(x + y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2y.$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções homogêneas de grau 1, determine as suas expressões analíticas.

9 Derivação da Função Composta para Ordens Superiores

- Para a obtenção das derivadas parciais (ou total) de segunda ordem aplica-se a regra da cadeia à derivada parcial de primeira ordem conveniente (também neste caso um *esquema em "árvore"* para essa derivada parcial (ou total) de primeira ordem é facilitador).

9.1 Exercícios Propostos

1. Determine a expressão da derivada (total) $\frac{d^2 f}{dt^2}(t)$ sendo f a função

$$f(x, y) = \ln \frac{x}{y},$$

em que $x = \sin t$ e $y = \cos t$.

2. Dada a função $W(x) = (x + 4)^2$ com $x = u^2 - v^2$, calcule as derivadas parciais de 2ª ordem

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}(u, v), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}(u, v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}(u, v).$$

3. Seja g uma função contínua na origem e $f(x, y) = xyg(x, y)$. Use a definição para calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

4. Considere a função $f(x, y) = xg\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right)$.

(a) Determine a expressão da derivada parcial de 2ª ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(b) Mostre que é válida a igualdade

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

5. Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + xy\varphi(ax - by, x + y^2),$$

em que φ é uma função de classe C^2 . Determine as expressões gerais das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.

6. Determine a expressão de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y)$ sendo $U = f(x, y, z)$ com $z = \varphi(x, y)$.

7. Considere $f(x, y) = x^2 y^2$ em que $x = \sin t$ e $y = \cos t$. Determine a expressão da derivada (total) $\frac{d^2 f}{dt^2}(t)$.

8. Seja a função $W = F(u)$ com $u = f(x)g(y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}(x, y).$$

9. Demonstre que a função $z = f[x + \varphi(y)]$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)$$

10. Dada a função $H(x, y) = f(ax + by) + g(ax - by)$, determine o quociente

$$Q = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y)}{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y)}$$

Sugestão: Considere $H = f(t) + g(w)$ em que $t = ax + by$ e $w = ax - by$.

11. Sejam g e h funções de classe C^2 e c uma constante real não nula. Prove que a função $f(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct)$ é uma solução da equação (equação de ondas unidimensional)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 0.$$

10 Diferenciais de Ordem Superior

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f . Se f é de classe C^2 , define-se o **diferencial de segunda ordem** (ou **segundo diferencial**) de f no ponto (a, b) para os acréscimos dx e dy das variáveis x e y , que se denota por $d^2 f(a, b)$, como o diferencial do diferencial de primeira ordem,

$$\begin{aligned} d^2 f(a, b) &= d[df(a, b)] = dx \cdot \frac{\partial(df)}{\partial x}(a, b) + dy \cdot \frac{\partial(df)}{\partial y}(a, b) \\ &\stackrel{\text{T. S.}}{=} dx^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2 \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ &\quad + dy^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b). \end{aligned}$$

Se f é de classe C^3 , o **diferencial de terceira ordem** (ou **terceiro diferencial**) de f no ponto (a, b) para os acréscimos dx e dy das variáveis x e y , que se denota por $d^3 f(a, b)$, é o diferencial do diferencial de segunda ordem,

$$\begin{aligned} d^3 f(a, b) &= d[d^2 f(a, b)] = dx \cdot \frac{\partial(d^2 f)}{\partial x}(a, b) + dy \cdot \frac{\partial(d^2 f)}{\partial y}(a, b) \\ &\stackrel{\text{T. Schwartz}}{=} dx^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b) + 3 \cdot dx^2 \cdot dy \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b) \\ &\quad + 3 \cdot dx \cdot dy^2 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b) + dy^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b). \end{aligned}$$

Analogamente, se f é de classe C^k , o **diferencial de ordem k** (ou **k -ésimo diferencial**) de f no ponto (a, b) define-se como

$$d^k f(a, b) = d[d^{k-1} f(a, b)].$$

As expressões obtidas contam com a igualdade entre as derivadas mistas envolvidas, garantida pelo Teorema de Schwartz, desde que seja preservado o número de vezes que se deriva em ordem a cada uma das variáveis.

10.1 Exercícios Propostos

1. Dada a função $z(x, y) = x^2y + x + \exp(x)$, determine a expressão do diferencial de 2ª ordem d^2z .
2. Seja f a função real definida por $f(x, y) = x^2y - 3y$. Determine a expressão geral dos diferenciais de segunda e terceira ordens de f .
3. Considere a função $f(x, y) = x \cos(y) + y \sin(x)$. Determine a expressão do diferencial de 3ª ordem d^3f .
4. Seja f a função $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos(x^2)$, para $y \neq 0$. Sabendo que

$$df(x, y) = -\frac{2x}{y} \sin(x^2) dx - \frac{1}{y^2} \cos(x^2) dy,$$

calcule o diferencial de 1ª ordem de $df(x, y)$ no ponto $(0, 1)$ para $dx = 0.01$ e $dy = -0.2$. Interprete teoricamente o resultado.

5. Dada a função $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$, calcule o diferencial de 2ª ordem $d^2f(0, 0, 0)$.
6. Determine o diferencial de 2ª ordem d^2z para $z = f(u, v)$ em que $u = ax$ e $v = by$.
7. Considere a função $F = \varphi(t)$ em que $t = x^2 + y^2$. Determine a expressão do diferencial de 2ª ordem d^2F .
8. Calcule $d^2f(1, 2)$ para a função

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln(x) - 10 \ln(y).$$

9. Determine o diferencial d^2f da função $f = u + v$ em que $u = \frac{x}{y}$ e $v = xy$.
10. Determine a expressão de d^2f sendo f a função definida para $xy \neq 1$ por

$$f(x, y) = \frac{x}{1 - xy}.$$

11. Determine $d^2 f$ para a função f definida para $y \neq 0$ por

$$f(x, y) = \tan \frac{x}{y}.$$

12. Determine o diferencial de 3ª ordem $d^3 f$ para a função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy).$$

13. Determine o diferencial de 2ª ordem de cada uma das funções

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad \text{e} \quad g(x, y) = \exp \frac{x}{y}.$$

14. Determine $d^2 f$ para a função $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$.

15. Considere a função

$$df(x, y) = x^y dx + \ln^2(xy) dy.$$

Calcule o seu diferencial de primeira ordem no ponto $P(1, 1)$ para $dx = 0.01$ e $dy = -0.2$, e interprete teoricamente o resultado.

11 Determinantes Funcionais: Jacobiano e Hessiano

- O conceito de vector gradiente generaliza-se a funções vectoriais como segue.

Sejam $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $m \geq 2$, uma função vectorial de n variáveis reais definida por m funções componentes $f_1, \dots, f_m$ reais de n variáveis reais, e $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto interior a $D_{\mathbf{f}}$. Se todas as derivadas parciais de primeira ordem das funções componentes $f_1, \dots, f_m$ no ponto $(a_1, \dots, a_n)$ existem e são finitas, define-se a **Jacobiana** (ou **matriz de Jacobi**) de $\mathbf{f}$ no ponto $(a_1, \dots, a_n)$, que se denota por $\mathbf{Jf}(a_1, \dots, a_n)$, como sendo a matriz $m \times n$ dessas derivadas,

$$\mathbf{Jf}(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \end{bmatrix}_{m \times n},$$

que se resume como

$$\mathbf{Jf}(a_1, \dots, a_n) = \left[\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(a_1, \dots, a_n) \right]_{m \times n}.$$

Se a matriz for quadrada, o seu determinante designa-se por **Jacobiano de f no ponto** $(a_1, \dots, a_n)$.

O elemento genérico da matriz Jacobiana $\mathbf{Jf}(a_1, \dots, a_n)$ é

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

Na linha i estão as sucessivas derivadas parciais de primeira ordem da função componente f_i , $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n)$ para $j = 1, \dots, n$. Na coluna j estão as derivadas parciais em ordem a x_j das sucessivas funções componentes $f_1, \dots, f_m$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n)$ para $i = 1, \dots, m$.

Se $m = 1$ a matriz Jacobiana tem uma única linha: é uma matriz linha (de tipo $1 \times n$) cuja matriz transposta é o vector gradiente de $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $(a_1, \dots, a_n)$ (ponto interior a D_f)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad } f}(a_1, \dots, a_n) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) \cdot \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \cdot \vec{e}_n. \end{aligned}$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis reais e $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto interior a D_f . Define-se a **matriz Hessiana de f no ponto** $(a_1, \dots, a_n)$ como sendo a matriz quadrada

$$\mathbf{Hf}(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, \dots, a_n) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_1, \dots, a_n) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_1, \dots, a_n) \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

O determinante de $\mathbf{Hf}(a_1, \dots, a_n)$ designa-se por **Hessiano de f no ponto** $(a_1, \dots, a_n)$.

O elemento genérico da matriz Hessiana $\mathbf{H}f(a_1, \dots, a_n)$ é

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}.$$

Na linha i estão as sucessivas derivadas parciais de segunda ordem da função f , $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n)$ para $j = 1, \dots, n$. Na coluna j estão as derivadas parciais de segunda ordem em ordem a x_j da função f , $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a_1, \dots, a_n)$ para $i = 1, \dots, n$.

- O Teorema de Schwartz é ainda válido para funções reais $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de n variáveis reais com $n \geq 3$.

Teorema de Schwartz generalizado. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis reais e $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto interior a D_f . Se existem e são contínuas todas as derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f nos pontos $(x_1, \dots, x_n)$ de uma bola aberta centrada em $(a_1, \dots, a_n)$ e todas as derivadas parciais de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, excepto uma, são contínuas no ponto $(a_1, \dots, a_n)$ então a restante derivada mista também é contínua nesse ponto e a ordem pela qual essas derivadas são calculadas é arbitrária, ou seja,

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a_1, \dots, a_n)}$$

para todo o $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$.

Se f é de classe C^2 num conjunto aberto A contido em D_f então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a_1, \dots, a_n)$$

para todo o $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$, sempre que o ponto $(a_1, \dots, a_n)$ pertença a A . Como tal, se f é de classe C^2 num conjunto aberto A contido em D_f então a matriz Hessiana $\mathbf{H}f(a_1, \dots, a_n)$ é uma matriz simétrica, sempre que o ponto $(a_1, \dots, a_n)$ pertença a A .

11.1 Exercícios Propostos

1. Determine a matriz Jacobiana e o Jacobiano da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^3, 4x + y^2).$$

2. Determine a matriz Jacobiana e o Jacobiano da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + 3y^2 \\ f_2(x, y) = 2x + 3 \end{cases}.$$

3. Determine a matriz Jacobiana e, sempre que possível, o Jacobiano das funções:

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (u, v, w)$ dados por

$$\begin{cases} u = x^2 + y - z \\ v = xyz^2 \\ w = 2xy - y^2z \end{cases};$$

- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (r, s, t)$ dados por

$$r = xy \quad \wedge \quad s = 2x \quad \wedge \quad t = -y$$

- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(x, y) = (x + 2y, -x, 2x, -y);$$

- (d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} r = u - w + 3z \\ s = -u + 2v + z \\ t = v + w + 2z \end{cases};$$

- (e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin \theta$$

(ρ e θ dizem-se as coordenadas polares);

(f) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\rho, \theta, z) = (x, y, z)$ em que

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

(ρ , θ e z dizem-se as coordenadas cilíndricas);

(g) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} x = 2u + \beta v + w \\ y = u + (\beta + 2)v + 2w \\ z = v + 2\beta w \end{cases} ;$$

(h) Determine β na alínea anterior de modo a que o respectivo Jacobiano seja nulo.

4. Determine a matriz Jacobiana e o Jacobiano da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 \end{cases} .$$

5. Seja f a função dada por

$$f(s, t) = \begin{cases} w_1 = \frac{2t - 6}{2s^2 + 2} \\ w_2 = \frac{s - 4}{t + 1} \end{cases} .$$

Calcule o Jacobiano de f .

6. Calcule a matriz Hessiana e o Hessiano das funções:

(a) $z = x \sin(y) + \sin(x)$;

(b) $z = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$;

(c) $z = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$;

(d) $z = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$;

(e) $z = \exp(2x) + \exp(-y) - 2x - 2\exp(w) + y$.

12 Soluções dos Exercícios Propostos

12.1 Domínios de Definição

1. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 2 - 3x\}$
(b) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
(c) $D_f = \mathbb{R}^2$
(d) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
(e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}$
(f) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y > x^2\}$
(g) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x - 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$
(h) $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x + 4 \wedge y > \frac{3}{x}, x \neq 0 \right\}$
(i) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$
(j) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
(k) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leq -2 \wedge -2 \leq y \leq 2)\}$
 $\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2\}$
(l) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$
(m) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
(n) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sqrt{x} \wedge x \geq 0\}$
(o) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
(p) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -|x| \leq y \leq |x|\} \setminus \{(0, 0)\}$
(q) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$
(r) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq -x \wedge y < x^2) \vee (y \leq -x \wedge y > x^2)\}$
(s) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
(t) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$
3. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 1 - x\}$
(b) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
(c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y > x^2 \wedge x^2 + y^2 \geq 4) \vee x^2 + y^2 \leq 1\}$
(d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \sqrt[3]{2x}\} \cup \{(0, 0)\}$

- (e) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = -x \wedge x \leq 0\}$,
 ou ainda, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$
- (f) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 3y^2\} \cup \{(0, 0), (3, 1)\}$
- (g) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{2} \right\} \cup \{(0, 0)\} \right)$,
 ou ainda, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \frac{1}{2} \right\} \setminus \{(0, 0)\}$
- (h) $D_f = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = -x\}) \cup \{(0, 0)\}$,
 ou ainda, $D = \{(x, y) \mid y \neq -x\} \cup \{(0, 0)\}$
4. $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, 1] \wedge y > \frac{1}{x} \right\}$
2. $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{x} \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \neq 0 \right\}$
5. $D_f = \mathbb{R}^2$
6. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
 (b) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -3x\} \cup \{(0, 0)\}$
 (c) $D_f = \mathbb{R}^2$
 (d) $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x \right\} \cup \{(0, 0)\}$

12.2 Limites e Continuidade

1. É contínua se $\beta = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 0
4. Não existe limite em $(0, 0)$
5. Não tem limite em $(0, 0)$
6. f é contínua

7. É contínua em $(0, 0)$
8. É contínua em pontos do eixo dos xx com abcissa positiva
9. É contínua para $\alpha = 0$
10. É contínua na origem
11. É descontínua na origem
12. Obtemos $|f(x, y) - 0| \leq \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{n-1} + \frac{|p|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ donde se conclui o pretendido
13. É descontínua em $(0, 0)$ pois não existe o limite em $(0, 0)$
14. É contínua em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -3\} \setminus \{(0, 0)\}$
15. É contínua em $(0, 0)$
16. É prolongável por continuidade no ponto $(0, 0)$ pois existe com valor finito (a saber, valor nulo) o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$
17. É contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
18. É contínua
19. Não existe o limite em $(0, 0)$ (note que $|y + x \sin x| \leq |y| + |x \sin x| \leq |y| + |x| |x|$)

12.3 Derivadas e Diferenciais de 1ª Ordem

1. $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{6}{25}$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{1}{2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 0$
3. Pela definição, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = +\infty$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = +\infty$
4. Pela definição, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

5. Pela definição, $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, -2) = -\infty$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, -2) = +\infty$

6. 0 (pela definição)

7. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \exp(xy)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \exp(xy)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

8. (a) $df(x, y) = 2xydx + (x^2 - 3)dy$

(b) $\Delta f(4, 3) = 0.018702$; $df(4, 3) = 0.02$

(c) $f(1.03, 1.99) = f(1, 2) + df(1, 2) = -3.86$

9. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^4 + y^4}{x^2y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x^4 + 3y^4}{xy^2}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\exp(x - 5y^2)}{2\sqrt{\exp(x - 5y^2) - y^2}}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{5[\exp(x - 5y^2) + 1]y}{\sqrt{\exp(x - 5y^2) - y^2}}$

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cot \frac{x + \alpha}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x + \alpha}{2y\sqrt{y}} \cot \frac{x + \alpha}{\sqrt{y}}$

10. $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = y \tan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = x \tan \frac{y}{x} + y \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}$, que verificam a igualdade pretendida

11. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

12. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{4xy^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$ para $(x, y) \neq (0, 0)$; não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

13. (a) $df(2, 2) = 1.4$
 (b) $df(x, y) = (\sin(ax) + ax \cos(ax)) dx + (-\cos(by) + by \sin(by)) dy$
 (c) $dz(x, y) = \frac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x \tan \frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x} dx + dy\right)$
 (d) $dz(3, 1) = -0.8$
 (e) $dz(x, y) = \exp(x - 2y) [y(1 + x) dx + x(1 - 2y) dy]$
 (f) $dz(x, y) = \sin(2x) dx - \sin(2y) dy$
14. $df(1, 1) = 0.01$; tal significa que $\Delta f = f(1 + 0.01, 1 - 0.2) - f(1, 1) \simeq 0.01$
15. $df(1, 2) = -0.00(6)$; $\Delta f(1, 2) = -0.0056686$
16. $f(32.1, 1.2) \simeq 2.00375$

12.4 Diferencialidade

- Não é diferenciável em $(0, 0)$
- Não existem as derivadas parciais de f em $(0, 0)$ logo a função não é diferenciável neste ponto
- (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$
 (b) Se $\alpha \neq 0$ então f não é diferenciável em $(0, 0)$ por não ser contínua nesse ponto (ver exercício da secção 2.1); se $\alpha = 0$ então f não é diferenciável em $(0, 0)$ pela definição
 (c) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 + 6x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^2x^2 - y^4 - 4x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. (a) É descontínua em $(0, 0)$
 (b) Não é diferenciável na origem por ser descontínua na origem
5. (a) Pela definição, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -\infty$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$
 (b) Não é diferenciável na origem por ser descontínua nesse ponto
 (ver exercício da secção 2.1)
6. $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \infty$ logo a função f não é diferenciável no ponto $(2, 1)$
7. (a) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. O derivado de D é $\mathbb{R}^2$, portanto D é um conjunto aberto e fechado
 (b) $f(0, 0) = \beta$
 (c) É diferenciável na origem
8. (a) Pela definição, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$
 (b) É diferenciável se $n \geq 3$ e $p = 0$

12.5 Regra de Derivação da Função Composta

1. $f'(t) = 2[1 + tg^2(x^2 + y^2)] \left[x(2t - 3) + \frac{y}{t} \right]$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \frac{2u^2 + 2u - 2}{(1 + u)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \frac{2u^2 + 2u - 2}{(1 + u)^2}$ para
 $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f'(s) = (2Ax + 2By)(2vs + u) + (2Bx + 2Cy) \left(\frac{2s}{u} - \frac{1}{2\sqrt{v}} \right)$
4. Tomando $u = x - y, v = y - z$ e $t = z - x$, temos $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial t}$,
 $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$ e $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t}$, que verificam a igualdade
 requerida
5. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 + 2xy}{\sqrt{1 + (u + v)^2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{1 + (u + v)^2}}$ sendo $u = xy^2$ e
 $v = x^2y$

6. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} + y \exp(xy) \frac{\partial z}{\partial v}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \frac{\partial z}{\partial u} + x \exp(xy) \frac{\partial z}{\partial v}$
7. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy f'(x^2 - y^2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x^2 - y^2) - 2y^2 f'(x^2 - y^2)$, que verificam a igualdade requerida
8. $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{\alpha-1} g'\left(\frac{y}{x}\right)$
9. $\frac{dU}{dw} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dw} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dw} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dw} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{dw}$
10. Tomando $u = \frac{x}{y}$ e $v = \frac{t}{x}$, temos $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xg(u, v) + x^2 \left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{1}{y} - \frac{\partial g}{\partial v} \frac{t}{x^2} \right)$

12.6 Derivada Direccional e Dirigida

1. (a) $f'_{(1,-1)}(0,0) = 3$
 (b) $f'_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(0,0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$
2. $f'_{(1,2)}(0,0) = 0$
3. (a) $\overrightarrow{\text{grad } f}(0,1) = (0,0)$
 (b) $f'_{\overrightarrow{v}}(0,1) = 0$
4. $f'_{(a,b)}(0,0) = \frac{b^2}{a}$
5. (a) $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$
 (b) $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$
6. Trata-se de $f'_{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}(2,1)$ [segundo o versor do vector $(3,5)$] e tem valor $\frac{47}{5}$
7. (a) $2\sqrt{2x}$
 (b) $2r$ na direcção do raio; 0 na direcção da recta tangente

8. (a) $\overrightarrow{\text{grad } f}(2, 2) = (2, -2)$
 (b) $\overrightarrow{\text{grad } f}(-1, 0) = (0, 0)$
9. A derivada é máxima na direcção e sentido do vector gradiente e tem o valor $\sqrt{e^2 + 1}$
10. (a) Na direcção do vector $\vec{v} = (0, 1)$
 (b) $\frac{dg}{dx}(x) = \sin(2x) + 2x$ e a função trigonométrica $\sin(2x)$ tem derivadas contínuas de todas as ordens
11. Na direcção do vector $\vec{u} = (1, 0)$

12.7 Função Homogénea

1. (a) 0
 (b) 0
 (c) 1
 (d) 1
 (e) $-\frac{1}{2}$
 (f) $-\frac{1}{2}$
2. É homogénea de grau 2; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \ln \frac{x}{y} - y$, que verificam a Identidade de Euler $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot f(x, y)$
3. (a) É válida a Identidade de Euler
 (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \alpha A x^{\alpha-1} y^\beta$ é homogénea de grau $\alpha + \beta - 1$
4. (a) $\alpha = 3$
5. (a) $a = 6$ e $b = 9$
 (b) 3

6. (a) f é homogénea de grau 0
 (b) $f'_v(1, 1) = 0$
 (c) $\overrightarrow{\text{grad } f}(1, 1) = (e + 1, -e - 1)$
7. (a) A igualdade é segue de g ser homogénea de grau n
 (b) Tomando $u = y/x$ e $v = z/x$, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = nx^{n-1}f - x^{n-2}y\frac{\partial f}{\partial u} - x^{n-2}z\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^{n-1}\frac{\partial f}{\partial u}$$
 e $\frac{\partial g}{\partial z} = x^{n-1}\frac{\partial f}{\partial v}$, que verificam a igualdade pretendida
8. (a) Para todo o γ ($\forall \gamma \in \mathbb{R}$), $\alpha = 2 - \gamma$ e $\beta = \gamma$; o grau de homogeneidade é α
9. É homogénea se $\alpha = -\frac{3}{2}$ e $\beta = \frac{13}{2}$
10. É homogénea se $\alpha = -\frac{5}{2}$ e $\beta = -1$
11. Para todo o α ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$), $\beta = 1 - \alpha$ e $\gamma = 3 + \alpha$
12. É homogénea de grau 2 (Identidade de Euler)
13. (a) 3
 (b) Como g é homogénea de grau 3 as suas derivadas de 1ª ordem são homogéneas de grau 2.
14. $f\left(\frac{xt}{yt}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) = t^o f\left(\frac{x}{y}\right)$ logo f é homogénea de grau 0. Tomando $u = \frac{x}{y}$ temos
- $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{y} + y\frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$
15. (a) 2
16. Sendo f uma função homogénea de grau 0 é válida a Identidade de Euler $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, logo $x\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\partial f}{\partial y}$

17. f é homogénea de grau $\alpha = -1$ e g é homogénea de grau 0. Logo verifica-se a Identidade de Euler
18. $k = 0$; grau 2
19. f é homogénea para $a = 10$ e $b = 6$; grau 4
20. (a) $k = 1$; grau 2
(b) As derivadas parciais de primeira ordem são homogéneas de grau 1
21. (a) Sim, de grau 0
(b) Para iguais variações das variáveis independentes x e y , a variável dependente z mantém-se constante
22. É homogénea de grau 3 (Identidade de Euler)
23. (a) A relação pretendida é a Identidade de Euler correspondente à função
(b) É homogénea de grau $u + v$
24. 1
25. f não é homogénea para $\{(x, y) : x \neq 3y\}$
26. (a) 2
27. (a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^a > 0 \wedge y \neq 0\}$
(b) $a = 16$ e $b = 4$; grau 3
28. $k = 1$; grau 3
29. (a) 1
30. É homogénea de grau n , logo a igualdade dada é a Identidade de Euler correspondente
31. A função g é homogénea de grau 2
32. Sim, de grau n
33. (a) $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = 3x^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2xy \frac{\partial z}{\partial v} = 20$, $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = x^2 \frac{\partial z}{\partial v} = 8$
(b) $f(8, 4) = 8$
(c) -20 ; é uma derivada dirigida

12.8 Derivadas Parciais de Ordem Superior

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, que verificam a igualdade pretendida

2. $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y+k) - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{k} = 4x$

3. $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = 0$, onde

as derivadas de 1ª ordem são $\frac{\partial f}{\partial x}(h, 0) = \cos h$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$

4. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = 2y \exp(x) + 6y^2$ e $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(x, y) = y^2 \exp(x)$

5. $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{y^2}(\exp(x) + \sin x)$

e $\frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{y^2}(\exp(x) + \cos x)$

6. Pela definição, obtemos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$

7. (a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \frac{\ln(x^2 + y^2) - 1}{\ln^2(x^2 + y^2)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \frac{\ln(x^2 + y^2) - 1}{\ln^2(x^2 + y^2)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= \begin{cases} \frac{4xy(2 - \ln(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2) \ln^3(x^2 + y^2)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ & \text{e } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

(b) f é diferenciável no ponto $(0, 0)$

8. Temos $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2\frac{xy^2}{x+y} - \frac{x^2y^2}{(x+y)^2},$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = 2\frac{y^2}{x+y} - 4\frac{xy^2}{(x+y)^2} + 2\frac{x^2y^2}{(x+y)^3}$$

e $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = 4\frac{xy}{x+y} - 2\frac{xy^2}{(x+y)^2} - 2\frac{x^2y}{(x+y)^2} + 2\frac{x^2y^2}{(x+y)^3},$ que verificam a igualdade pretendida.

9. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{(1+x)^m m^2 (1+y)^n}{(1+x)^2} - \frac{(1+x)^m m (1+y)^n}{(1+x)^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{(1+x)^m n^2 (1+y)^n}{(1+y)^2} - \frac{(1+x)^m n (1+y)^n}{(1+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{(1+x)^m mn (1+y)^n}{(1+x)(1+y)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

10.

a. São necessárias as derivadas (calculadas pela definição) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) = -h,$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(k, 0) = k$ para chegar às derivadas de 2ª ordem pretendidas

b. Não se verifica a continuidade da função $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na origem

11. $F''_{xy}(0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ e $F''_{yx}(0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1;$ a derivada mista F''_{xy} não é contínua na origem, logo o Teorema de Schwartz não se aplica

12. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$

13. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = -\frac{a^2}{a-b} - \frac{a^3}{(a-b)^2}$ para $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$

14.

a. grau 2 se $\delta = 2$ e $\epsilon = 3$

b. $\frac{\partial f}{\partial x}$ é homogénea de grau 1 e verifica a Identidade de Euler

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

15. Verifica-se a igualdade pretendida dado que $\frac{\partial z}{\partial x}$ é homogénea de grau $(u + v - 1)$

16.

a. As derivadas parciais de 2^a ordem são homogéneas de grau 1, logo a função f é homogénea de grau 3

b. $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + y^3)$

17. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x^2 + 4xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 2y^2$

12.9 Derivação da Função Composta para Ordens Superiores

$$1. \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = 2 + 2 \tan(t^2) - \frac{[1 + \tan(t^2)]^2}{\tan(t^2)}$$

$$2. \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = 12u^2 - 4v^2 + 16, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = -8uv \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 12v^2 - 4u^2 - 16$$

$$3. \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = yg(0, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = xg(x, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = g(0, 0)$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = g(0, 0)$$

4. Tomando $u = \frac{y}{x}$ obtemos

$$(a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g'' \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} h''$$

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} g'' + \frac{2y}{x^3} h' + \frac{y^2}{x^4} h''$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} g'' - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} h''$,
que verificam a igualdade pretendida

5. Tomando $u = ax - by$ e $v = x + y^2$ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + y\varphi + xy \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} a + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + x\varphi + xy \left(-b \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = & -\frac{1}{y^2} + \varphi + (ax - by) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + (x + 2y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial v} - abxy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \\ & + (2axy^2 - bxy) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + 2xy^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \end{aligned}$$

6. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

7. $\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = 2 \cos(t) [\cos^2(t) - \sin^2(t)] - 2 \sin^2(2t)$

8. $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

9. $\frac{\partial z}{\partial x} = f''(x + \varphi(y))$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x + \varphi(y)) \varphi'(y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(x + \varphi(y)) \varphi'(y)$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x + \varphi(y))$, que satisfazem a igualdade pretendida

10. $Q = \frac{b^2}{a^2}$

11. Análogo ao exercício anterior

12.10 Diferenciais de Ordem Superior

1. $d^2 z(x, y) = (2y + \exp x) dx^2 + 4x dx dy$

2. $d^2 f(x, y) = 2y dx^2 + 4x dx dy$ e $d^3 f(x, y) = 6 dx^2 dy$

$$3. \ d^3 f(x, y) = -y \cos(x) dx^3 + 3(-\sin x) dx^2 dy + 3(-\cos y) dx dy^2 \\ + x \sin(y) dy^3$$

$$4. \ d^2 f(0, 1) = 0.08$$

$$5. \ d^2 f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy + 8dxdz + 4dydz$$

$$6. \ d^2 z(x, y) = \frac{d^2 f}{du^2} a^2 dx^2 + 2 \frac{d^2 f}{dudv} ab dx dy + \frac{d^2 f}{dv^2} b^2 dy^2$$

$$7. \ d^2 F(x, y) = (4x^2 \varphi'' + 2\varphi') dx^2 + 8xy \varphi'' dx dy + (4y^2 \varphi'' + 2\varphi') dy^2$$

$$8. \ d^2 f(1, 2) = 6dx^2 + 2dxdy + \frac{9}{2} dy^2$$

$$9. \ d^2 f(x, y) = 2 \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) dx dy + \frac{2x}{y^3} dy^2$$

$$10. \ d^2 f(x, y) = \frac{2y}{(1-xy)^3} dx^2 + \frac{4y}{(1-xy)^3} dx dy + \frac{2x^3}{(1-xy)^3} dy^2$$

$$11. \ d^2 f(x, y) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{y}\right) \left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{y}\right)\right]}{y^2} dx^2 \\ - \frac{2 \left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{y}\right)\right] \left(y + 2x \tan \frac{x}{y}\right)}{y^3} dx dy \\ + \frac{2x \left(y + x \tan \frac{x}{y}\right) \left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{y}\right)\right]}{y^4} dy^2$$

$$12. \ d^3 f(x, y) = [-y^5 \cos(xy)] dx^3 + 3[-4y^3 \sin(xy) - y^4 x \cos(xy)] dx^2 dy \\ + 3[6y \cos(xy) - 6xy^2 \sin(xy) - x^2 y^3 \cos(xy)] dx dy^2 \\ + [6x \cos(xy) - 6yx^2 \sin(xy) - y^2 x^3 \cos(xy)] dy^3$$

$$13. \ d^2 f(x, y) = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx^2 - \frac{8xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy^2$$

$$e \ d^2 g(x, y) = \frac{\exp \frac{x}{y}}{y^2} dx^2 - \frac{2(x+y) \exp \frac{x}{y}}{y^3} dx dy + \frac{x(2y+x) \exp \frac{x}{y}}{y^4} dy^2$$

$$14. \quad d^2 f(x, y, z) = 2y^3 z dx^2 + 6x^2 y z dy^2 + 12xy^2 z dx dy + 4xy^3 dx dz + 6x^2 y^2 dy dz$$

$$15. \quad d^2 f(1, 1) = 0.0001$$

12.11 Determinantes Funcionais

$$1. \quad Jf(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 6y^2 \\ 4 & 2y \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{e} \quad |Jf(x, y)| = 4xy - 24y^2$$

$$2. \quad Jf(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 6y \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{e} \quad |Jf(x, y)| = 12y$$

$$3. \quad (a) \quad Jf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & -1 \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ 2y & 2x - 2yz & -y^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\text{e} \quad |Jf(x, y, z)| = 6x^2 y^2 z^2 - 8x^3 yz + y^3 z^2 + 4xy^2 z + 2y^2 z^3$$

$$(b) \quad Jf(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$(c) \quad Jf(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$(d) \quad Jf(u, v, w, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$(e) \quad Jf(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{e} \quad |Jf(\rho, \theta)| = \rho$$

$$(f) \quad Jf(\rho, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{e} \quad |Jf(\rho, \theta, z)| = \rho$$

$$(g) \quad Jf(u, v, w) = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 1 \\ 1 & \beta + 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2\beta \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$e \mid Jf(u, v, w) \mid = 2\beta^2 + 8\beta - 3$$

$$(h) \quad \beta = \frac{-4 \pm \sqrt{22}}{2}$$

$$4. \quad Jf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8x_1 + 12x_2 & 12x_1 + 18x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$e \mid Jf(x_1, x_2) \mid = -12x_1 - 18x_2$$

$$5. \quad |Jf(s, t)| = \frac{1}{(t+1)(2s^2+2)} - \frac{2s(2t-6)(s-4)}{(t+1)^2(2s^2+2)^2}$$

$$6. \quad (a) \quad H(x, y) = \begin{bmatrix} -y \sin x & \cos(x) + \cos y \\ \cos(x) + \cos y & -x \sin y \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$e \mid H(x, y) \mid = xy \sin(x) \sin y - [\cos(x) + \cos y]^2$$

$$(b) \quad H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad e \mid H(x_1, x_2, x_3) \mid = 54$$

$$(c) \quad H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$e \mid H(x_1, x_2, x_3) \mid = -72x_1 + 18$$

$$(d) \quad H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad e \mid H(x_1, x_2, x_3) \mid = 4$$

$$(e) \quad H(x, y, w) = \begin{bmatrix} 4 \exp(2x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-y) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \exp w \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$e \mid H(x, y, w) \mid = -8 \exp(2x - y + w)$$