1. a) $\mathrm{P}\, x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)$ é do tipo $\mathrm{P} \operatorname{sen}(u)\, u'$. Portanto,

$$\mathrm{P}\, x^2 \operatorname{sen}(x^3+4) = \frac{1}{3}\mathrm{P}\, 3x^2 \operatorname{sen}(x^3+4) = -\frac{1}{3}\cos(x^3+4) + \ c1$$

b) $\mathrm{P}\frac{5\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{4x}} = 5\frac{1}{2}\mathrm{P}\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{1+(\mathrm{e}^{2x})^2} = \frac{5}{2}\arctan \mathrm{e}^{2x} + c2$

c) Vamos calcular $\mathrm{P}\, x \operatorname{arcsen}(x^2)$ por partes.

$u = \operatorname{arcsen}(x^2) \qquad u' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

$v = \frac{x^2}{2} \qquad v' = x$

$\mathrm{P}\, uv' = uv - \mathrm{P}u'v = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}(x^2) - \mathrm{P}\frac{x^2}{2}\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Resolvendo agora esta última primitiva, $\mathrm{P}\frac{x^2}{2}\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{4}\mathrm{P}\frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}} =$

$= -\frac{1}{4}\mathrm{P}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}(-4x^3) = -\frac{1}{4}\frac{(1-x^4)^{1/2}}{1/2} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$

Portanto, $\mathrm{P}\, x \operatorname{arcsen}(x^2) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}(x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + \ c3$

d) $\mathrm{P}\frac{3x}{x^3+2x^2-3x} = \frac{3}{4}\mathrm{P}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\mathrm{P}\frac{1}{x+3} = \frac{3}{4}(\log|x-1| - \log|x+3|) + \ c4 = \frac{3}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \ c4$

Cálculos auxiliares:

$x^3+2x^2-3x = x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x+3)$

$\frac{3x}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+3)} \Rightarrow 3x = A(x-1)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-1)$

$x = 0 \ \Rightarrow 0 = -3A, \quad A = 0$

$x = 1 \ \Rightarrow 3 = 4B, \quad B = \frac{3}{4}$

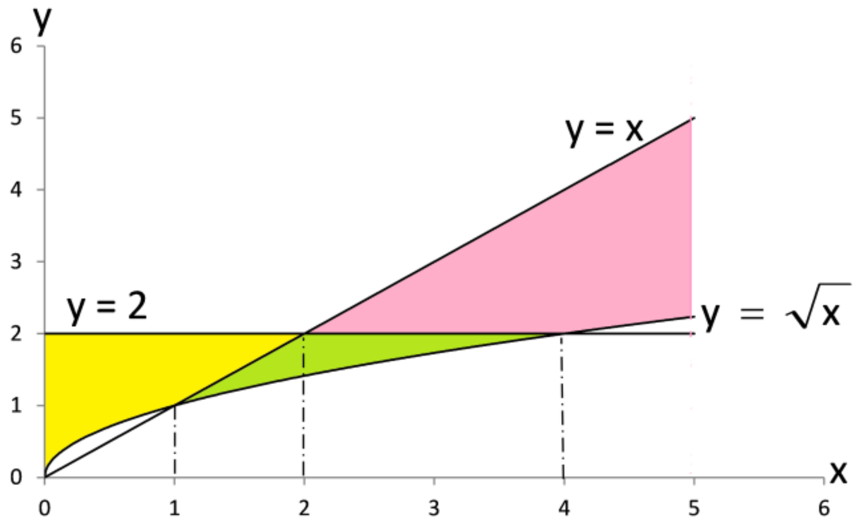
$x = -3 \ \Rightarrow -9 = 12C, \quad C = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$

2. Vamos tentar calcular o integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4+5\mathrm{e}^x}}\, dx$ usando a mudança de variável $t = \mathrm{e}^x$.
Assim, $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}\, dt$. Sendo assim, $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \mathrm{e}$. Vem então,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4+5\mathrm{e}^x}}\, dx = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{\sqrt{4+5t}}\frac{1}{t}dt = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{\sqrt{4+5t}}dt$$

Como t é uma variável muda, a conclusão segue-se.

3. A área pretendida está assinalada a verde,



e cujo valor é: $\int_1^2 (x-\sqrt{x})\ dx + \int_2^4 (2-\sqrt{x})\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 + \left[2x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_2^4 = \frac{5}{6}$

Cálculos auxiliares: $x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1;$
$y = 2 \wedge y = x \Rightarrow x = 2;\ y = 2 \wedge y = \sqrt{x} \Rightarrow x = 4$

Nota: Neste exercício poder-se-ia gerar alguma incerteza quanto à identificação da região limitada pelas curvas referidas. Veja-se então que a única região limitada exclusivamente por $y = \sqrt{x},\ y = x$ e $y = 2$ é a representada a verde, cuja área foi calculada atrás. A região a amarelo é adicionalmente limitada à esquerda pela reta vertical $x = 0$, e a região a roxo não é limitada à direita. Como exercício calcule a área da região a amarelo.

4. Derivando ambos os membros da equação

$$\varphi(x) = \int_1^{e^x} f(t)\,\frac{\log t}{1+\log^2 t}\,dt$$

obtemos:

$$\varphi'(x) = f(e^x)\,\frac{\log e^x}{1+\log^2(e^x)}\,e^x = e^x f(e^x)\,\frac{x}{1+x^2}$$

Como o contradomínio de e^x é $\mathbb{R}^+$, onde f é, por hipótese, positiva, $\varphi'(x) = 0$ sse $x = 0$.

	0	
$\varphi'(x)$	-	+
$\varphi(x)$	↘	↗
	min φ	

A função $\varphi(x)$ é decrescente até ao ponto 0 e cresce a partir daí. Porque é continua neste ponto, tem aí um mínimo. O valor de φ no ponto 0 é: $\varphi(0) = \int_1^1 f(t)\,\frac{\log t}{1+\log^2 t}\,dt = 0$