Resolução da ficha

(1) $f(x,y) = (y, x-3y)$; $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(1,0) = (0,1)$

$f(0,1) = (1,-3)$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) $$G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2y \end{bmatrix}$$

Portanto, $g(x,y) = (x+y, 2y)$.

(c) $$M(f\circ g; bc, bc) = FG = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$FG\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ x-5y \end{bmatrix}.$$

$$M(g\circ f; bc, bc) = GF = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$GF\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ 2x-6y \end{bmatrix}$$

Assim,

$(f\circ g)(x,y) = (2y, x-5y)$ e $(g\circ f)(x,y) = (x-2y, 2x-6y)$.

(d) f é invertível $\Longleftrightarrow$ F é invertível.

Como $|F| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 \neq 0$, F é invertível e consequentemente f é invertível.

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y \\ x \end{bmatrix} \Longrightarrow f^{-1}(x,y) = (3x+y, x).$$

(e) $P = M(id; \mathcal{B}, bc) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(porque a base de chegada é a canónica!)

(f)
$$\begin{tikzcd} \underset{b.c}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f", "F"'] & \underset{b.c}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "id", "P^{-1}"'] \\ \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "id", "P"'] \arrow[r, "A'=?", "f"'] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

Como o diagrama é comutativo,

$$A' = P^{-1} F P$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se:

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

---

2 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $g(x,y) = (x+2y, y)$

(a) $$Au = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -u$$

$$Av = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = v$$

$$Aw = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = w$$

Concluímos assim que u é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_u = -1$, v é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_v = 1$ e w é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_w = 1$. Em particular, $spec(A) = \{-1, 1\}$.

(b) O determinante de uma matriz é dado pelo produto dos seus valores próprios. Portanto:

$$|A| = \lambda_u \times \lambda_v \times \lambda_w = (-1) \times 1 \times 1 = -1 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$, A é invertível.

Um argumento mais direto: A é invertível se e só se $0 \notin spec(A)$. Como $spec(A) = \{-1, 1\}$, A é invertível.

(c) $V_{-1} = N(A-(-1)I) = N(A+I) = span\{(2,-1,1)\}$

$V_1 = N(A-I) = span\{(0,-1,1),(1,-1,0)\}$.

Assim, $\dim V_{-1} = 1$ e $\dim V_1 = 2$.

Como $\dim V_{-1} + \dim V_1 = 1+2 = 3$ e A é do tipo 3×3 (ou seja, é um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$), A é diagonalizável.

(d) $g(1,0) = (1,0)$ $\qquad C = M(g; bc, bc) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$g(0,1) = (2,1)$

(e) • B: $p_B(x) = |B - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 3^2$

$= (1-x-3)(1-x+3) = -(2+x)(4-x)$

$p_B(x) = 0 \Leftrightarrow -(2+x)(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$.

Logo, $spec(B) = \{-2, 4\}$.

• g: $p_C(x) = |C - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$

$p_C(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$spec(C) = \{1\}$.

(f) • B:

$$V_{-2} = N(B-(-2)I) = N(B+2I).$$

$$B+2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3x+3y=0 \iff \begin{cases} y=-x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(x,-x) = x(1,-1), \ x \in \mathbb{R}$$

$$V_{-2} = \operatorname{span}\{(1,-1)\}.$$

$$V_4 = N(B-4I)$$

$$B-4I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_1]{} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x+3y=0 \iff \begin{cases} y=x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(x,x) = x(1,1), \ x \in \mathbb{R}.$$

$$V_4 = \operatorname{span}\{(1,1)\}.$$

• g:

$$V_1 = N(C-I)$$

$$C-I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2y=0 \iff \begin{cases} y=0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(x,0) = x(1,0), \ x \in \mathbb{R}$$

$$V_1 = \operatorname{span}\{(1,0)\}.$$

(g) Como B é 2×2 e tem dois valores próprios distintos, B é diagonalizável. Relativamente a g:

Como $m.g.(1) = \dim V_1 = 1 < m.a.(1) = 2$, g (ou C) não é diagonalizável.