

1ª Parte: Resposta rápida

1. (a) $r(A) = 3$ (porque $4 = \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{r(A)} + r(A)$)

(b) $S \cdot P \cdot I$. (porque $r(A) = r[A|B] = 3 \leq n = 4$)

2. $|A| = \frac{1}{2}$, $A_{3 \times 3}$

$$\det(-2A) = (-2)^3 \times \det(A) = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\det(A^2 A^T) = \det(A^2) \times \det(A^T) = \det(A)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 2$$

3.

$$(a) [w]_{B_2} = P \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) [u]_{B_2} = (1, 0) \quad (1^\text{ª} \text{ Coluna de } P)$$

4.

(a) Falso. Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e A não é invertível.

(b) Verdadeiro

2.ª Parte

$$\textcircled{1} \quad (a) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & \alpha+1 & \beta+1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha+1 & \beta+1 \\ 0 & 0 & -\alpha-2 & -\beta-1 \end{array} \right]$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \alpha \neq -2, \\ \forall \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad r(A) = r[A|B] = 3 = n. \\ \text{S.P.D.}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad , \quad r(A) = r[A|B] = 2 < n = 3 \\ \text{S.P.I.}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta \neq -1 \end{cases} \quad , \quad r(A) = 2 < r[A|B] = 3 \\ \text{S.I.}$$

$$(b) \quad \left| \frac{1}{2} A \right| = \frac{1}{8} |A| = \frac{1}{8} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \frac{1}{8} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \right| =$$

$$\downarrow \quad \text{Laplace na 1-ª coluna} \\ = \frac{1}{8} \left| \begin{array}{cc} 2 & \alpha+1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = \frac{1}{8} (-2 - 2(\alpha+1)) = \frac{-2}{8} (\alpha+2)$$

$$= -\frac{1}{4} (\alpha+2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -2$$

O sistema é possível e determinado se, e só se, $|A| \neq 0$,
pois que o resultado é consistente com (a).

(c) seja $\alpha = -1$ e $\beta = 0$. O sistema fica:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \text{gralha: substituir por } -1$$

$$\begin{cases} x = -1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ ou seja, } X = P_0 = (-1/2, 1/2, 0).$$

$\downarrow$
 $(-1/2, 1/2, 1)$

Fazendo agora $\alpha = -2$ e $\beta = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y \\ z = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

A solução é da forma:

$$\begin{aligned} (1 - 3y, y, 2y) &= (1, 0, 0) + (-3y, y, 2y) \\ &= (1, 0, 0) + y(-3, 1, 2), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim,

$$X = (1, 0, 0) + \text{span}\{(-3, 1, 2)\}.$$

(d) $\alpha = \beta = 0$.

$$(i) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ z = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 1/4 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

(ii) Calculemos a inversa de A , usando o algoritmo.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2} L_2 \\ -\frac{1}{2} L_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3 \\ L_1 \rightarrow L_1 - L_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left(\text{Verificação: } \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \checkmark \right)$$

Portanto, $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$

Tem-se:

$$Ax = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(iii) Para $\alpha = \beta = 0$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Laplace} \\ \text{na 3-ª} \\ \text{coluna}}]{=} 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0.$$

Logo, o sistema $Ax = B$ é de Cramer. Tem-se:

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} [(0+0+0) - (1+0+0)] = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} [(0+0-1) - (0+0+0)] = \frac{1}{4}$$

$$z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} [(1+0-3) - (1+0-1)] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

②

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a) \quad A \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x = -3z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(-3z, 2z, z) = z(-3, 2, 1), \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B} = \{(-3, 2, 1)\} \text{ é base de } N(A).$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como as colunas dos pivot's são a 1ª e a 2ª, podemos escolher para base de $C(A^T)$ a 1ª e a 2ª coluna originais, a saber,

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1)\} \text{ é base de } C(A^T).$$

$$(b) \text{ Já vimos que } C(A^T) = \text{span}\{(1, 1, 1), (1, 0, -1)\}.$$

Seja $(x, y, z) \in C(A^T)$. Então:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & \textcircled{-1} & y-x \\ 0 & -2 & z-x \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{array} \right]$$

Para que o sistema seja possível, é necessário que:

$$\boxed{x - 2y + z = 0.}$$

Obtemos assim um sistema de equações lineares, formado por uma única equação que define $C(A^T)$.

Para $C(A)$ é semelhante:

de (a) concluímos que $C(A)$ é da forma

$$C(A) = \text{span} \{(1, 1, 3), (1, 0, 2)\}.$$

Então,

$$(u, y, z) \in C(A) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & u \\ 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & z \end{array} \right] \text{ tem de ser S.P.}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 1 & u \\ 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & z \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & u \\ 0 & \textcircled{-1} & y-u \\ 0 & -1 & z-3u \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & u \\ 0 & -1 & y-u \\ 0 & 0 & -2u-y+z \end{array} \right]$$

A equação que define $C(A)$ é:

$$\boxed{2u + y - z = 0}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad V &= \{(u, y, z) : (u, y, z) \perp (1, 0, -1) \text{ e } (u, y, z) \perp (1, 1, 2)\} \\ &= \{(u, y, z) : (u, y, z) | (1, 0, -1) = (u, y, z) | (1, 1, 2) = 0\} \end{aligned}$$

usando o critério de subspaço:

$$(i) \quad (0, 0, 0) \in V \text{ porque } (0, 0, 0) | (1, 0, -1) = (0, 0, 0) | (1, 1, 2) = 0.$$

(ii) Se (u, y, z) e $(u', y', z') \in V$, das propriedades do produto interno, vem:

$$\begin{aligned} ((u, y, z) + (u', y', z')) | (1, 0, -1) &= (u, y, z) | (1, 0, -1) + (u', y', z') | (1, 0, -1) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((u, y, z) + (u', y', z')) | (1, 1, 2) &= (u, y, z) | (1, 1, 2) + (u', y', z') | (1, 1, 2) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

(iii) Finalmente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(u, y, z) \in V$,

$$\alpha (u, y, z) | (1, 0, -1) = \alpha [(u, y, z) | (1, 0, -1)] = \alpha \times 0 = 0$$

$$\alpha (u, y, z) | (1, 1, 2) = \alpha [(u, y, z) | (1, 1, 2)] = \alpha \times 0 = 0.$$

$$(4) \quad B = \left\{ \underset{\text{"u"}}{(1, 0, -1)}, \underset{\text{"v"}}{(1, 0, 1)}, \underset{\text{"w"}}{(0, 1, 0)} \right\}.$$

$$(a) \quad u \cdot v = (1, 0, -1) \cdot (1, 0, 1) = 1 - 1 = 0$$

$$u \cdot w = (1, 0, -1) \cdot (0, 1, 0) = 0$$

$$v \cdot w = (1, 0, 1) \cdot (0, 1, 0) = 0$$

Portanto, os vetores são ortogonais 2 a 2.

$$(b) \quad B' = \left\{ \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\} \text{ e-base ortonormada.}$$

Tem-se:

$$\|u\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|v\| = \sqrt{2}$$

$$\|w\| = 1$$

Assim, $B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), (0, 1, 0) \right\}$ e-base ortonormada.

(c) Temos que escrever $(3, 1, 1)$ como combinação linear na base B :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\left[(3, 1, 1) \right]_B = (1, 2, 1).$$

$$(5) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a) \quad \text{Adj}(A) = \hat{A}$$

$$(\hat{A})_{24} = C_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3 + 0 - 20) - (-15 + 10 + 0)$$

$$= -17 - (-5) = -12.$$

$$(b) \quad |A| = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} - \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\downarrow \text{Laplace} \\ \text{na 1-a} \\ \text{coluna}}}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 [(3+6+5) - (15+2+3)]$$

$$= -4 \times (-6) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Sistema de Cramer.}$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{porque } C_1 = C_2).$$

$$(c) \quad (A^{-1})_{31} = \frac{1}{|A|} (\hat{A})_{31} = \frac{1}{|A|} C_{13} = \frac{1}{24} \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} [(2+12+15) - (20+6+3)] = 0$$

$$(6) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, y) = (2y, u, u+y)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(u, y, z) = (u+y+z, z)$$

$$(a) \quad A = M(f; bc, bc) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(1, 0) = (0, 1, 1)$$

$$f(0, 1) = (2, 0, 1)$$

$$B = M(g; bc, bc) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(1, 0, 0) = (1, 0)$$

$$g(0, 1, 0) = (1, 0)$$

$$g(0, 0, 1) = (0, 1)$$

gralha: devia ser (1, 1)

$$(b) \quad S = M(f \circ g; bc, bc) = AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T = M(g \circ f; bc, bc) = BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad g \circ f \text{ é invertível} \Leftrightarrow T \text{ é invertível}$$

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \Leftrightarrow T \text{ é invertível.}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = M((g \circ f)^{-1}; bc, bc)$$

$$T^{-1} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y - u \\ u - 2y \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$(g \circ f)^{-1}(u, y) = (3y - u, u - 2y).$$

(d) $S = M(f \circ g; bc, bc) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\text{rk}(S) = 2$ e os pivots estão nas colunas 1 e 3, podemos escolher as colunas 1 e 3 originais para base de $\text{Im}(f \circ g)$:

$$B = \{(0, 1, 1), (2, 1, 2)\}$$

base de $\text{Im}(f \circ g)$

observação: Claro que, sendo $C_1 = C_2$, poderíamos ter logo afirmado que as colunas 1 e 3 (a 2 e 3) formam uma base de $\text{Im}(\text{Log})$.

Pelo teorema da dimensão:

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

$f \circ g$

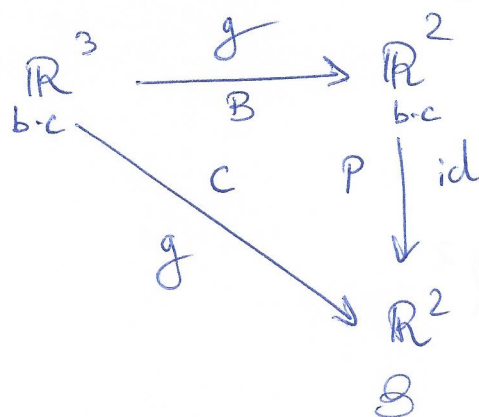
$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker}(f \circ g) + \dim \text{Im}(f \circ g)$$

$$3 = \dim \ker(f \circ g) + 2,$$

a) Seja, $\dim \ker(f \circ g) = 1$.

Como $\dim \ker(f \circ g) > 0$, $f \circ g$ não é injetiva e
como tal não é invertível.

(e) $B = \{(1,1), (2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$



, $P = M(id; b-c, B)$
é uma matriz de
mudança de base.

É fácil determinar $P^{-1} = M(id; B, b-c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Invertendo esta matriz, obtemos P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$C = PB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se:

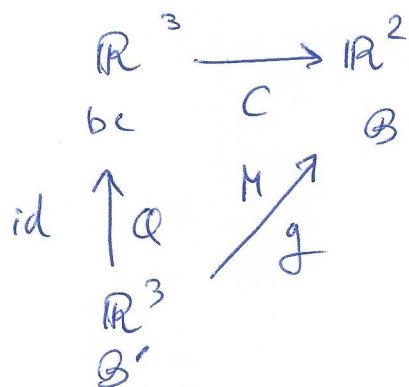
$$[g(1,1,-2)]_B = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$[g(1,1,-2)]_B = (-6, 4).$$

(f) $B' = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Vamos usar $C = M(g; bc, B')$ para calcular M . (1) gralha: devia ser a base B



, onde $Q = M(id; B', bc)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de mudança de base, da base B' para a base bc .

Tem-se:

$$M = CQ = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$g([1, 2, 3]_{B'})$$

Atenção: de acordo com a notação, temos que obter o vetor $(1, 2, 3)$ na base B' . Para isso, aplicamos Q^{-1} ao vetor $(1, 2, 3)$.

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} \hat{Q} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} +|011| & -|011| & +|001| \\ -|011| & +|011| & -|001| \\ +|111| & -|011| & +|011| \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, $M \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Agora temos que obter as coordenadas de $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ na base canônica, uma vez que o vetor está na base $\mathcal{B}$.
Para isso, bast aplicar a matriz de mudança de base

$$P^{-1} = M(\text{id}; \mathcal{B}, b.c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$g([1, 2, 3]_{\mathcal{B}'}) = (3, 3)_{b.c.}$$

Observação: Foi um longo caminho porém nos fediram para usar a matriz M . No entanto, aplicando diretamente

$B = M(g; b.c, b.c)$, vem:

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} ! \quad \text{😊}$$

$$\textcircled{7} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad f(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$$

$$\begin{aligned} (a) \quad p_A(x) &= |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = [(1-x)^2 - 1](2-x) \\ &= (1-x-1)(1-x+1)(2-x) = -x(2-x)^2 \end{aligned}$$

$$f(1, 0) = (1, 2) ; \quad f(0, 1) = (2, 1) \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_B(x) = |B - xI| = \begin{vmatrix} -x & 2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x) - 2 =$$

$$= x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

Concluímos que:

$$\text{spec}(A) = \{0, 2\} \quad \text{e} \quad \text{spec}(f) = \text{spec}(B) = \{-1, 2\}.$$

Calculamos os vetores próprios de A e f .

• Relativamente a A :

$$V_0 = N(A - 0I) = N(A) = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} x+y=0 \\ 2z=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y=-x \\ z=0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$(x, -x, 0) = x(1, -1, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $(1, -1, 0)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio 0.

$$V_2 = N(A - 2I) = ?$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad -x+y=0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y=x \\ x, z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$(x, x, z) = (x, x, 0) + (0, 0, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1), \quad x, z \in \mathbb{R}$$

Portanto, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ são vetores próprios de A associados ao valor próprio 2.

• Relativamente a f (ou seja, a $B = M(f|_B, b_C)$):

$$V_{-1} = N(B - (-1)I) = N(B + I) = ?$$

$$B + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x+2y=0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x=-2y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$(-2y, y) = y(-2, 1)$, $y \in \mathbb{R}$. Portanto, $(-2, 1)$ é vetor próprio de f associado ao valor próprio -1.

$$V_2 = N(B - 2I) = ?$$

$$B - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x-y=0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y=x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$(x, x) = x(1, 1)$, $x \in \mathbb{R}$, pelo que $(1, 1)$ é vetor próprio de f associado ao valor próprio 2.

(b) Tendo em conta os cálculos em (a),

- Relativamente a A :

$$V_0 = N(A) = \text{span}\{(1, -1, 0)\}; \quad V_2 = N(A - 2I) \\ = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

- Relativamente a f :

$$V_{-1} = N(B + I) = \text{span}\{(-2, 1)\}; \quad V_2 = N(B - 2I) = \text{span}\{(1, 1)\}.$$

(c) f é diagonalizável porque é um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ e tem 2 valores próprios distintos. Pelo teorema espectral conclui-se que:

$$D_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A é diagonalizável porque representa um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ (ou seja, A é uma matriz 3×3) e

$$\dim V_0 + \dim V_2 = 1 + 2 = 3.$$

Pelo teorema espectral,

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) $\text{spec}(B^{-1}) = \text{spec}(f^{-1}) = \left\{ \frac{1}{-1}, \frac{1}{2} \right\} = \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\}$. Além disso,

$$B^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) $\text{spec}(A^{10}) = \{0^{10}, 2^{10}\} = \{0, 2^{10}\}$ e tem-se:

$$A^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A^{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2^{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$