PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

INTRODUÇÃO

Um problema em programação linear inteira apresenta mais uma restrição, tal que as variáveis de decisão deverão ser estritamente números inteiros.

$$
\begin{array}{ll}
\text{MAX:} & 2X_1 + 3X_2 \\
\text{Subject to:} & X_1 + 3X_2 \le 8.25 \\
 & 2.5X_1 + X_2 \le 8.75 \\
 & X_1, X_2 \ge 0 \\
 & X_1, X_2 \text{ must be integers}
\end{array}
$$

A chamada relaxação em programação linear é o problema de programação inteira normal, como resolvido até ao momento, ou seja, excluindo a restrição dos números unicamente inteiros e aceitando qualquer solução contínua.

$$
\begin{array}{ll}
\text{MAX:} & 2X_1 + 3X_2 \\
\text{Subject to:} & X_1 + 3X_2 \le 8.25 \\
 & 2.5X_1 + X_2 \le 8.75 \\
 & X_1, X_2 \ge 0
\end{array}
$$

EXEMPLO DAS BANHEIRAS

No problema dado inicialmente, a solução ótima obtida era uma solução inteira, mesmo sendo o problema de relaxação em programação linear. No entanto, ao alterar os modelos, nem sempre é o caso obter soluções inteiras pelo que se deve recorrer à resolução do problema pela programação linear inteira.

$$
\begin{array}{lll}
\text{MAX:} & 350X_1 + 300X_2 & \}\ \text{profit} \\
\text{Subject to:} & 1X_1 + 1X_2 \le 200 & \}\ \text{pump constraint} \\
 & 9X_1 + 6X_2 \le 1{,}566 & \}\ \text{labor constraint} \\
 & 12X_1 + 16X_2 \le 2{,}880 & \}\ \text{tubing constraint} \\
 & X_1, X_2 \ge 0 & \}\ \text{nonnegativity conditions}
\end{array}
$$

Solução óptima: X1 = 122, X2 = 78

Lucro óptimo = $66 100

$$
\begin{array}{llrl}
\text{MAX:} & 350X_1 + 300X_2 & & \}\ \text{profit} \\
\text{Subject to:} & 1X_1 + \ \ 1X_2 \leq & 200 & \}\ \text{pump constraint} \\
 & 9X_1 + \ \ 6X_2 \leq & \boxed{1{,}520} & \}\ \text{labor constraint} \\
 & 12X_1 + \ \ 16X_2 \leq & \boxed{2{,}650} & \}\ \text{tubing constraint} \\
 & X_1, X_2 \geq & 0 & \}\ \text{nonnegativity conditions} \\
 & X_1, X_2 \text{ must be integers} & & \}\ \text{integrality conditions}
\end{array}
$$

Relaxação em PL:

$$
\begin{array}{llrl}
\text{MAX:} & 350X_1 + 300X_2 & & \}\ \text{profit} \\
\text{Subject to:} & 1X_1 + \ \ 1X_2 \leq & 200 & \}\ \text{pump constraint} \\
 & 9X_1 + \ \ 6X_2 \leq & \boxed{1{,}520} & \}\ \text{labor constraint} \\
 & 12X_1 + \ \ 16X_2 \leq & \boxed{2{,}650} & \}\ \text{tubing constraint} \\
 & X_1, X_2 \geq & 0 & \}\ \text{nonnegativity conditions}
\end{array}
$$

Solução da relaxação em PL: X1 = 116,9444, X2 = 77,9167

Lucro óptimo (da relaxação em PL) = $64 306

A solução ótima já não é inteira, ou é não admissível para o problema inteiro.

PROPRIEDADE

O valor da função objetivo da solução ótima do problema inteiro nunca poderá ser maior do que o valor da função objetivo da solução ótima da sua relaxação em programação linear.

Ou seja:

- Num problema de maximização, o valor ótimo da relaxação em PL é um limite SUPERIOR para o valor ótimo do problema inteiro.
- Num problema de minimização, o valor ótimo da relaxação em PL é um limite INFERIOR para o valor ótimo do problema inteiro.

TESTAGENS DE RESOLUÇÃO EM PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

Temos várias opções por arredondamento:

- Arredondar para os valores mais próximos
- Arredondar ambos para cima
- Arredondar ambos para baixo
- Arredondar o primeiro para cima e o segundo para baixo
- Arredondar o primeiro para baixo e o segundo para cima

Devemos verificar se estas soluções estão contidas na zona ótima, ou seja, se respeitam as restrições à função objetivo, no fundo se são viáveis.

No entanto, embora esta seja a maneira mais fácil de obter uma solução inteira, nem sempre corresponde à solução ótima do problema.

Se não corresponderem à solução ótima mas estiverem na zona admissível, podem funcionar como limites inferiores ou superiores da solução ótima.

Exercício 10 Capítulo 6

A Garden City Beach é um destino de férias de verão popular para milhares de pessoas. Em cada verão, a cidade contrata nadadores-salvadores temporários para garantir a segurança do público que está de férias. Os nadadores-salvadores da Garden City são contratados para trabalhar 5 dias consecutivos numa semana com 2 dias de folga. No entanto, a companhia de seguros requer que a companhia tenha pelo menos o seguinte número de nadadores-salvadores em vigilância nestes dias da semana:

Minimum Number of Lifeguards Required Each Day

	Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
Lifeguards	18	17	16	16	16	14	19

O empresário da cidade gostaria de determinar qual o número mínimo de nadadores-salvadores que terão que ser contratados.

Variáveis de decisão:

xi -> número de nadadores-salvadores no turno i =1,2,3,4,5,6,7

Turno 1: Seg, Ter, Qua, Qui, Sex | Turno 2: Ter, Qua, Qui, Sex, Sab |Turno 3: Qua, Qui, Sex, Sab, Dom| Turno 4: Qui, Sex, Sab, Dom, Seg| Turno 5: Sex, Sab, Dom, Seg, Ter| Turno 6: Sab, Dom, Seg, Ter, Qua| Turno 7: Dom, Seg, Ter, Qua, Qui

Modelo em PLI:

Min nº nadadores = x1 + x2+ x3 + x4 + x5 + x6 + x7

Sujeito a:

x3 + x4 + x5 + x6 + x7 >= 18

x4 + x5 + x6 + x7 + x1 >= 17

x5 + x6 + x7 + x1 + x2 >= 16

x6 + x7 + x1 + x2 + x3 >= 16

x7 + x1 + x2 + x3+ x4 >= 16

x1 + x2 + x3 + x4 + x5 >= 14

x2 + x3+ x4 + x5 + x6 >= 19

xi >=0 e xi inteiros

Resolução no Solver:

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	MIN	
2	4	3	5	3	5	2	24	
								Mínimo
		1	1	1	1	1	18	18
1			1	1	1	1	17	17
1	1			1	1	1	16	16
1	1	1			1	1	16	16
1	1	1	1			1	16	16
1	1	1	1	1			17	14
	1	1	1	1	1		20	19

d) Uma grande parte dos nadadores-salvadores expressaram preferência pelo turno que tem folga aos Sábados e Domingos. Qual é o máximo de nadadores-salvadores que podem ter folga no fim de semana sem alterar o nº mínimo de nadadores-salvadores obtidos na solução ótima?

Modelo:

Max = x1

Sujeito a:

$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 = 24$

$x3 + x4 + x5 + x6 + x7 >= 18$

$x4 + x5 + x6 + x7 + x1 >= 17$

$x5 + x6 + x7 + x1 + x2 >= 16$

$x6 + x7 + x1 + x2 + x3 >= 16$

$x7 + x1 + x2 + x3 + x4 >= 16$

$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 >= 14$

$x2 + x3 + x4 + x5 + x6 >= 19$

xi >=0 e xi inteiros

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	MIN
Nadadores	3	3	4	4	0	8	2	24

Valor ótimo= 3 ou seja é possível ter no máximo 3 nadadores-salvadores a folgar ao fim de semana.

Exercício 15 Capítulo 6

A HCSF está a planear construir um certo número de clínicas de emergência no centro da Flórida. A equipa da HCSF dividiu um mapa da área em 7 regiões. Eles querem localizar as clínicas de emergência de forma que todas as 7 regiões sejam convenientemente servidas por pelo menos uma clínica.

Cinco possíveis sítios estão disponíveis para construir as novas clínicas. As regiões que podem ser servidas por cada sítio estão indicadas na tabela por um X:

	1	2	Possible Building Sites 3	4	5
Region	**Sanford**	**Altamonte**	**Apopka**	**Casselberry**	**Maitland**
1	X		X		
2	X	X		X	X
3		X		X	
4			X		X
5	X	X			
6			X		X
7				X	X
Cost ($1,000s)	$450	$650	$550	$500	$525

Variáveis de decisão:

Xi = clínicas construídas no sítio i=1,2,3,4,5

Xi= 1 se for construída clínica

Xi=0 caso contrário

Modelo em PLI:

Min custo = 450x1 + 650x2 + 550x3 + 500x4 + 525x5

Sujeito a:

x1 + x3 >= 1

x1 + x2 + x4 + x5 >= 1

x2 + x4 >= 1

x3 + x5 >= 1

x1 + x2 >= 1

x3 + x5 >= 1

x4 + x5 >= 1

xij binárias e inteiras

	Sanford	Altamonte	Apopka	Casselberry	Maitland	MIN		
Numero	1	0	0	1	1	1475		
	450	650	550	500	525			
	Sanford	Altamonte	Apopka	Casselberry	Maitland			
1	1		1			1	>=	1
2	1	1		1	1	3	>=	1
3		1		1		1	>=	1
4			1		1	1	>=	1
5	1	1				1	>=	1
6			1		1	1	>=	1
7				1	1	2	>=	1

Exercício 19 Capítulo 6

Uma empresa que desenvolve software de videogames tem 7 propostas para novos jogos. Infelizmente, a empresa não consegue desenvolver todas as propostas por causa do seu budget que está limitado em $950,000 e apenas tem 20 programadores para novos projetos.

O custo de cada projeto e o número requerido de programadores para tal estão sumarizados na tabela que se segue. Os projetos 2 e 6 requerem programação especializada que apenas um dos programadores tem. Estes dois projetos não podem ser selecionados ao mesmo tempo porque este programador só pode trabalhar num dos projetos.

Project	Programmers Required	Capital Required	Estimated NPV
1	7	$250	$650
2	6	$175	$550
3	9	$300	$600
4	5	$150	$450
5	6	$145	$375
6	4	$160	$525
7	8	$325	$750

Variáveis de decisão:

Seleção do projeto i=1,2,3,4,5,6,7 Xi = 1 se o projeto for selecionado Xi= 0 caso contrário

Modelo em PLI:

Max NPV = 650x1 + 550x2 + 600x3 + 450x4 + 375x5 + 525x6 + 750x7

Sujeito a:

250x1 + 175x2 + 300x3 + 150x4 + 145x5 + 160x6 + 325x7 <= 950

7x1 + 6x2 + 9x3 + 5x4 + 6x5 + 4x6 +8x7 <= 20

X2 + x6 <= 1

Xi >= 0 e xi binárias

Resolução no Solver:

2		1	2	3	4	5	6	7		
3	Projeto	1	0	0	0	0	1	1	MAX	
4	NPV	650	550	600	450	375	525	750	1925	
5										
6	Restri:	1	2	3	4	5	6	7		Máximo
7	Capital	250	157	300	150	145	160	325	735	950
8	Programadores	7	6	9	5	6	4	8	19	20
9	proj 2 e 6		1				1		1	1
10										

Valor ótimo= $1.925.000

Os projetos 1,6 e 7 foram selecionados tendo sido utilizados $735.000 dos $950.000 disponíveis para investimento.

São utilizados 19 dos 20 programadores disponíveis e, uma vez que o projeto 6 foi selecionado e este requer programação especial, então o programador selecionado foi para o projeto 6 não podendo ser selecionado o projeto 2.

Exercício 33 Capítulo 6

Um produtor de automóveis está a considerar mudanças de design mecânicas num dos seus carros mais vendidos para reduzir o peso do carro em pelo menos 400 libras para melhorar a eficiência do combustível. Engenheiros de design identificaram 10 possíveis mudanças que poderiam ser feitas no carro para o tornar mais leve. O peso perdido em cada design e os preços estimados de implementação de cada mudança estão sumarizados na tabela seguinte:

	Design Change									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Weight Saved (lbs)	50	75	25	150	60	95	200	40	80	30
Cost (in $1,000s)	$150	$350	$50	$450	$90	$35	$650	$75	$110	$30

As mudanças 4 e 7 representam maneiras alternativas de modificar o bloco de engenharia e portanto apenas uma destas mudanças poderia ser selecionada. A companhia quer determinar quais mudanças fazer para reduzir o peso total do carro em pelo menos 400 libras na maneira menos dispendiosa.

Variáveis de decisão:

X_i = mudança implementada no carro, i=1,2,….,10

X_i= 1 se a mudança for efetuada

X_i= 0 caso contrário

Modelo em PLI:

Min Custo = 150x1 + 350x2 + 50x3 + 450x4 + 90x5 + 35x6 + 650x7 + 75x8 + 110x9 +30x10

Sujeito a:

x4 + x7 <= 1

50x1 + 75x2 + 25x3 + 150x4 + 60x5 + 95x6 + 200x7 + 40x8 + 80x9 + 30x10 >= 400

Resolução no Solver:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	MIN		
150	350	50	450	90	35	650	75	110	30	715		
50	75	25	150	60	95	200	40	80	30	415	>=	400
			1			1				1	<=	1

INTERPRETAÇÃO DO RESULTADO

Foram selecionadas as alterações 4,5,6,9 e 10 gerando um custo mínimo de $715.000. O carro ficou mais leve em 415 libras e uma vez que a alteração 4 foi selecionada, a 7 não pôde de facto ser.

a) Indique as alterações em relação ao modelo inicial.

i) Das alterações 5,6,7 e 8 só podem ser selecionadas até 2
X5 + x6 +x7 + x8 <= 2

ii) A seleção das alterações 1 e 7 impossibilita que seja utilizada a alteração 8.

x1 + x7 + x8 <= 2

iii) A seleção das alterações 3 ou 4 impossibilita a alteração 5

x3 + x5 <= 1

x4 + x5 <= 1

iv) A alteração 9 só poderá ser executada caso a alteração 2 também seja realizada

x9 <= x2

Exercício Extra:

Uma empresa pretende planear a produção de dois produtos P1 e P2 para o próximo mês. Se decidir produzir P1, terá que instalar um equipamento cujo custo de instalação é de 800 u.m.

A produção de P2 não requer a instalação de qualquer equipamento. O custo de produção de uma tonelada é de 2 u.m. para P1 e 5u.m. para P2. A empresa deve produzir uma quantidade total mínima de 500 toneladas e pretende minimizar os custos totais.

a) Formule o problema em programação linear

Variáveis de decisão:
Xi – toneladas a produzir do produto i = 1,2
Yi = 1 caso seja instalado o equipamento necessário à produção do produto 1, 0 caso contrário.

Modelo em PLI:

Min custo= 2x1 + 5x2 + 800y1

Sujeito a:

x1 + x2 >=500 (produção total mínima)

x1 <= M1y1 onde M1 é um valor positivo suficientemente grande (M1-> "big M")

xi >= 0, i=1,2

y1 é binária (0 ou 1)

Alterações ao modelo:

b) O equipamento instalado para produzir P1 permite a produção máxima de 400 toneladas
Substituir o M1 por 400 que é a produção máxima.
x1 <= 400y1

c) Se a empresa decidir produzir P2, terá de produzir pelo menos 150 toneladas
x2 >= 150z
x2 <= M2z onde M2 é uma constante positiva suficientemente grande e z é uma variável binária

d) Se a empresa decidir produzir P2 terá de produzir dele pelo menos 150 toneladas e no máximo 350 toneladas
x2 >= 150z
x2 <= 350z

e) A empresa terá de produzir pelo menos 200 toneladas de P1 ou, pelo menos 350 toneladas de P2
x1 >= 200w
x2 >= 350(1-w)

Exercício 14 Capítulo 6

Uma companhia de energia está a considerar como aumentar a sua capacidade para conseguir responder aos pedidos na sua crescente área de serviço. Neste momento, a empresa tem 750MW de capacidade nos geradores, mas os projetos precisam de quantidades mínimas de capacidades de geradores nos próximos 5 anos:

	Year				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Minimum Capacity in Megawatts (MW)	780	860	950	1060	1180

A companhia consegue aumentar a sua capacidade de geradores ao comprar 4 tipos diferentes de geradores: 10MW, 25MW, 50MW e 100MW. O custo de adquirir e instalar cada um dos 4 tipos de geradores está na seguinte tabela:

	Cost of Generator (in $1,000s) in Year				
Generator Size	1	2	3	4	5
10 MW	$300	$250	$200	$170	$145
25 MW	$460	$375	$350	$280	$235
50 MW	$670	$558	$465	$380	$320
100 MW	$950	$790	$670	$550	$460

Variáveis de decisão:

Xij = número de geradores i a adquirir no ano j, em que i=1,2,3,4 e j=1,2,3,4,5

Modelo em PLI:

Min Custo = 300x11 + 250x12 + 200x13 + 170x14 + 145x15 + 460x21 + 375x22 + 350x23 + 280x24 + 235x25 + 670x31 + 558x32 + 465x33 + 380x34 + 320x35 + 950x41 + 790x42 + 670x43 + 550x44 + 460x45

Sujeito a:

750 + 10x11 + 25x21 + 50x31 + 100x41 >= 780

750 + 10(x11+x12) + 25(x21+x22) + 50(x31+x32) + 100(x41+x42) >= 860

750 + 10(x11+x12+x13) + 25(x21+x22+x23) + 50(x31+x32+x33) + 100(x41+x42+x43) >= 950

750 + 10(x11+x12+x13+x14) + 25(x21+x22+x23+x24) + 50(x31+x32+x33+x34) + 100(x41+x42+x43+x44) >= 1060

750 + 10(x11+x12+x13+x14+x15) + 25(x21+x22+x23+x24+x25) + 50(x31+x32+x33+x34+x35) + 100(x41+x42+x43+x44+x45) >= 1180

Resolução no Solver:

	Anos					
Geradores	1	2	3	4	5	
10MW	0	1	0	0	0	
25MW	0	0	0	0	1	
50MW	0	0	0	0	0	MIN
100MW	1	0	1	1	1	3115
	Anos					
Geradores	1	2	3	4	5	
10	300	250	200	170	145	
25	460	375	350	280	235	
50	670	558	465	380	320	
100	950	790	670	550	460	
Capacidade	Inicial	850	860	960	1060	1185
Minima	750	780	860	950	1060	1180

INTERPRETAÇÃO DO RESULTADO:

O custo mínimo ótimo obtido foi de $3.115.000. No ano 1 adquirimos 1 gerador de 100MW a mais do que a capacidade inicial que já se tinha (750+100) = 850MW.
No ano 2 adquiriu-se um gerador de 10MW, ficando-se com 860MW de capacidade.
No ano 3 adquiriu-se outro gerador de 100MW, aumentando a capacidade para 960MW, no ano 4 e 5 a mesma coisa.
Assim, as capacidades mínimas requeridas de geradores em cada ano foram cumpridas.

Exercício 8 Capítulo 6

A Bowden Transportes oferece serviços para condutores de camiões independentes especializados em transportar carros comprados online desde o vendedor até ao cliente. No momento, 4 carros precisam de ser recolhidos e entregues e 5 camiões estão disponíveis para o transporte destes carros.
A tabela seguinte sumariza o custo marginal de cada camião para recolher e entregar os carros, assim como a capacidade de carros que cada camião consegue transportar.

	Marginal Cost to Pick Up and Deliver				
	Car 1	Car 2	Car 3	Car 4	Capacity
Truck 1	$276	$497	$251	$364	2 cars
Truck 2	$179	$375	$298	$190	1 car
Truck 3	$150	$475	$344	$492	1 car
Truck 4	$ 97	$163	$285	$185	1 car
Truck 5	$305	$150	$225	$165	2 cars

A Bowden pede ao comprador um valor de $600 para recolha e entrega de cada carro e fica com 50% do lucro.
Variáveis de decisão:
Xij = carro número i transportado no camião j, com i= 1,2,3,4 e j=1,2,3,4,5
Xij= 1 se o carro for transportado nesse camião Xij= 0 caso contrário

Modelo em PLI:

Max lucro = ((600-276)x11 + (600-497)x21 + (600-251)x23 + (600-364)x24 + (600-179)x12 + (600-375)x22 + (600- 298)x32 + (600-190)x42 + (600-150)x13 + (600-475)x23 + (600-344)x33 + (600-492)x43 + (600-97)x14 + (600-163)x24 + (600-285)x34 + (600-185)x44 + (600-305)x15 + (600-150)x25 + (600-225)x35 + (600-165)x45)/2

Sujeito a:

x11 + x21 + x31 + x41 <= 2

x12 + x22 + x32 + x42 <= 1

x13 + x23 + x33 + x43 <= 1

x14 + x24 + x34 + x44 <= 1

x15 + x25 + x35 + x45 <= 2

x11 + x12 + x13 + x14 + x15 <= 1

x21 + x22 + x23 + x24 + x25 <= 1

x31 + x32 + x33 + x34 + x35 <= 1

x41 + x42 + x43 + x44 + x45 <= 1

Resolução no Solver:

			Carros				
Camiões	Car1	Car2	Car3	Car4		Capacidade	Max
T1	0	0	0	0	0	2	869
T2	0	0	0	1	1	1	
T3	0	0	0	0	0	1	
T4	1	0	0	0	1	1	
T5	0	1	1	0	2	2	
	1	1	1	1			
	1	1	1	1			

			Carros	
Camiões	Car1	Car2	Car3	Car4
T1	297	497	251	364
T2	179	375	298	190
T3	150	475	344	492
T4	97	163	285	185
T5	305	150	225	165

			Carros	
Camiões	Car1	Car2	Car3	Car4
T1	303	103	349	236
T2	421	225	302	410
T3	450	125	256	108
T4	503	437	315	415
T5	295	450	375	435

INTERPRETAÇÃO DO RESULTADO:

Dos 4 carros que tínhamos para transportar, um foi transportado no camião 2, um no camião 4 e os dois outros no camião 5. A soma dos custos destes foi o custo mínimo ótimo de $869.