

ISCTE - IUL
Fundamentos de Álgebra Linear
Frequência

Licenciatura em Ciência de Dados
Ano Letivo 2020/2021, 1º trimestre

9 de novembro de 2020

Nome do aluno:

Número do aluno:

Turma:

Observações:

1. Duração da prova: 2h00.
2. Deve responder a todas as questões nos espaços reservados às respostas. **Justifique convenientemente todas as respostas.**
3. A prova deve ser efetuada **sem consulta**.
4. Só é permitida a utilização de material de escrita. Em particular, não é permitida a utilização de máquina de calcular. Só são corrigidas as respostas apresentadas a caneta.
5. Durante a prova não é permitido o uso de telemóveis ou quaisquer equipamentos eletrónicos.
6. Envie a sua resolução para os endereços eletrónicos de **ambos** os docentes desta UC (sergio.mendes@iscte-iul.pt e jorge.miguel.rocha@iscte-iul.pt).
7. As suas respostas podem ser escritas à mão e depois fotografadas, mas devem ser fornecidas **num único ficheiro** — em princípio, com várias páginas.

Espaço reservado para cotações:

1ª Parte

Esta 1ª Parte é de **resposta rápida**, não devendo apresentar quaisquer cálculos ou justificações.

(4.0 val.) Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ e $A, B, C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ matrizes de entradas reais. Sejam $N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^\top$ e $Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Sabe-se que:

- A é a matriz cujas colunas são os vetores v_1, v_2, v_3 e $AY = N$;
- $\det(B) = -2$;
- C está em escada e $r(C) = 2$.

(0.5 val.) 1. Quanto à existência de solução, o sistema $CX = N$ é _____.

(0.5 val.) 2. Quanto à dependência linear, as colunas de AC são vetores _____.

(0.75 val.) 3. Sabendo que $\det(A) = \frac{1}{4}$ então:

$$\det(A^{-1}B^2) = \quad \det(-2A^\top) = \quad \det(ABC) = \quad .$$

(0.75 val.) 4. As coordenadas do vetor N na base $\mathcal{B}$ são $[N]_{\mathcal{B}} = \quad$.

(0.75 val.) 5. Se $\mathcal{B}'$ é outra base de $\mathbb{R}^3$ e se

$$P = M(\text{id}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

então $[N]_{\mathcal{B}'}$ = _____.

(0.75 val.) 6. Se $Cv_1 = 3v_1$, $Cv_2 = 3v_2$ e $Cv_3 = \lambda v_3$ então $\lambda = \quad$ e $\dim N(C - 3I) = \quad$.

2ª Parte

Nas questões da 2ª Parte deverá apresentar o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos e justificações necessárias.

- (4.5 val.) 1. Considere o sistema de equações lineares, $AX = B$, nas incógnitas x, y, z , e parâmetros reais α, β , dado por:

$$\begin{cases} x + 2y + z = \beta \\ x + (2 - \alpha)y + z = \beta + 1 \\ -2x + (\alpha - 4)y + \alpha z = -3\beta - 1 \end{cases}$$

- (2.5 val.) (a) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros reais α, β .
- (1.0 val.) (b) Considerando $\alpha = -2$ e $\beta = 0$, mostre que o conjunto-solução do sistema obtido é uma reta e represente-o na forma

$$P_0 + \text{span}\{u\}$$

- (c) Considere agora $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ no sistema inicial $AX = B$.
- (0.5 val.) (i) Calcule o determinante de A ;
- (0.5 val.) (ii) Recorrendo ao método de Cramer, indique o valor da variável x .

- (2.5 val.) 2. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

- (1.0 val.) (a) Verifique que (a, a) é um elemento de V , $\forall a \in \mathbb{R}$.
- (1.5 val.) (b) Mostre que V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

- (4.5 val.) 3. Considere o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ representado pela matriz

$$A = M(f; b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função linear definida por $g(x, y, z) = (x - z, x + 2y)$.

- (1.0 val.) (a) Determine a matriz $B = M(g; b.c., b.c.)$.
- (1.0 val.) (b) Mostre que f é invertível e determine a expressão analítica de f^{-1} .
- (1.5 val.) (c) Determine a matriz $M = M(f \circ g; b.c., b.c.)$ e use-a para calcular $(f \circ g)(1, 1, -2)$.
- (1.0 val.) (d) Seja $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $A' = M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ e use-a para calcular $[f([(2, -3)]_{\mathcal{B}})]_{\mathcal{B}'}$.

(3.5 val.)

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

(1.5 val.)

(a) Mostre que $u = (2, 1, -2)$, $v = (3, 1, 0)$ e $w = (-1, 0, -1)$ são vetores próprios de A e determine os valores próprios associados.

(1.0 val.)

(b) Justifique que A é diagonalizável e indique a matriz diagonal D e a matriz invertível P tais que $D = P^{-1}AP$ (Não necessita de verificar que $D = P^{-1}AP$).

(1.0 val.)

(c) Usando a decomposição $A = PDP^{-1}$, justifique que $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1.0 val.)

5. Seja $A \in \mathcal{M}_n$ uma matriz invertível. Mostre que a função linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(X) = AX$ é invertível e determine a expressão de f^{-1} .