ISCTE - IUL
Fundamentos de Álgebra Linear
Frequência

Licenciatura em Ciência de Dados
Ano Letivo 2019/2020, 1º trimestre

8 de outubro de 2019

Nome do aluno:

Número do aluno:

Turma:

Observações:

1. Duração da prova: 2h00.
2. Deve responder a todas as questões nos espaços reservados às respostas. **Justifique convenientemente todas as respostas.**
3. A prova deve ser efetuada **sem consulta**.
4. Só é permitida a utilização de material de escrita. Em particular, não é permitida a utilização de máquina de calcular. Só são corrigidas as respostas apresentadas a caneta.
5. Durante a prova não é permitido o uso de telemóveis ou quaisquer equipamentos eletrónicos.
6. Não destaque as folhas do teste.

Espaço reservado para cotações:

1ª Parte

Esta 1ª Parte é de **resposta rápida**, não devendo apresentar quaisquer cálculos ou justificações.

(4.0 val.) Sejam $A, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ matrizes de entradas reais. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & b \end{bmatrix}^\top$. Sabe-se que:

- $r(A) = 3$;
- C está em escada, $r(C) = 2$ e $c_{13} = -5, c_{23} = 1$.

(1.0 val.) 1. Sabendo que $\det(A^{-1}) = 2$ então:

$$\det(A) = \_\_\_\_\_\_ \qquad \det\left(-2A^2\right) = \_\_\_\_\_\_ \qquad \det(AC) = \_\_\_\_\_\_$$

(0.5 val.) 2. Quanto à existência de solução, o sistema $AX = B$, $\forall b \in \mathbb{R}$ é ______.

(1.0 val.) 3. Para que o sistema $CX = B$ seja possível é necessário que $b =$______. Quantas soluções diferentes tem o sistema nesse caso? ________.

(0.5 val.) 4. A entrada $(1, 3)$ da matriz $B^\top C$ é ______.

(0.5 val.) 5. A entrada $(2, 1)$ da matriz adjunta $\widehat{C}$ é ______.

(0.5 val.) 6. Seja $N(C)$ o espaço nulo de C. Então, $\dim N(C) =$______.

2ª Parte

Nas questões da 2ª Parte deverá apresentar o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos e justificações necessárias.

(4.5 val.) 1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z, e parâmetros reais α, β:

$$\begin{cases} y + (\alpha+1)z = -2\beta \\ 2x + y - 5z = \beta - 1 \\ x - 3z = \beta \end{cases}$$

(2.5 val.) (a) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros reais α, β.

(1.0 val.) (b) Considerando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, mostre que o conjunto-solução do sistema obtido é uma reta e represente-o na forma

$$P_0 + \mathrm{span}\{u\}$$

(c) Considere agora $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ no sistema original.

(0.5 val.) (i) Calcule o determinante da matriz A do sistema;

(0.5 val.) (ii) Recorrendo ao método de Cramer, indique o valor da variável x.

(3.0 val.) 2. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1,-1),(1,0,1),(-1,2,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

(0.5 val.) (a) Mostre que os vetores de $\mathcal{B}$ são ortogonais dois a dois.

(1.0 val.) (b) Obtenha, a partir de $\mathcal{B}$, uma base ortonormada $\mathcal{B}'$.

(1.5 val.) (c) Determine as coordenadas do vetor $v = (1,3,1)$ na base $\mathcal{B}'$. (**Note que, como a base é ortonormada, pode usar o produto interno.**)

(4.0 val.) 3. Considere a função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (2x - y, -2x + y)$.

(1.5 val.) (a) Indique a matriz $A = M(f; b.c, b.c)$ e determine uma base de $\ker f$. O que conclui quanto à injetividade de f? Justifique.

(1.0 val.) (b) Seja $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, 3)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $P = M(id_{\mathbb{R}^2}; b.c, \mathcal{B})$.

(1.5 val.) (c) Use a alínea anterior para obter a matriz $B = M(f; b.c, \mathcal{B})$ e calcule $[f(-2, 1)]_{\mathcal{B}}$ recorrendo a B.

(2.5 val.) 4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(0.75 val.) (a) Calcule os valores próprios de A.

(1.0 val.) (b) Determine os subespaços próprios de A.

(0.75 val.) (c) Justifique que A é diagonalizável e indique a matriz diagonal D e a matriz invertível P tais que $D = P^{-1}AP$.

(2.0 val.) 5. Recorde que o traço de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$ é a soma dos elementos da diagonal principal

$$\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Considere uma matriz genérica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$.

(1.0 val.) (a) Mostre que os coeficientes do polinómio característico de A,

$$p(x) = \det\,(A - xI) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0,$$

são dados por $\beta_2 = 1$, $\beta_1 = -\mathrm{tr}\,(A)$ e $\beta_0 = \det\,(A)$.

(1.0 val.) (b) Use a alínea anterior para indicar uma matriz $A \in \mathcal{M}_2$ cujo polinómio característico é $p(x) = x^2 - 2x + 3$ e que tenha a entrada $(1,1)$ igual a 1. (Note que tal matriz não é única).

Folha de rascunho

Folha de rascunho