Ficha de preparação para o Mini-Teste 4

1. Sejam $f(x,y) = (y, x-3y)$ e $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dois endomorfismos de $\mathbb{R}^2$. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Determine $F = M(f; bc, bc)$;

   (b) Indique a expressão analítica de $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $G = M(g; bc, bc)$;

   (c) Indique a expressão analítica de $f \circ g$ e de $g \circ f$;

   (d) Mostre que f é invertível, determine a expressão analítica de $f^{-1}(x,y)$ e use-a para calcular $f^{-1}(3,-2)$;

   (e) Detemine a matriz de mudança de base $P = M(id; \mathcal{B}, bc)$;

   (f) Usando a matriz de mudança de base da alínea anterior, determine $A' = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Escreva ainda o diagrama comutativo correspondente.

2. Considere o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, representado pela matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, e os endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ dados por $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $g(x,y) = (x+2y, y)$.

   (a) Mostre que $u = (2,-1,1), v = (0,-1,1), w = (1,-1,0)$ são vetores próprios de A e determine os respetivos valores próprios;

   (b) Analisando apenas os valores próprios, o que pode concluir quanto à invertibilidade de A? Quantos subespaços próprios diferentes tem a matriz A? Justifique cada uma das respostas;

   (c) Indique a dimensão dos subespaços próprios de A. Será que A é diagonalizável? Justifique;

   (d) Determine $C = M(g; bc, bc)$;

   (e) Determine os polinómios característicos, bem como os valores próprios de B e g;

   (f) Determine os subespaços próprios de B e g;

   (g) Alguma das matrizes B ou C é diagonalizável? Justifique.

(**Observação: Esta ficha é <u>substancialmente maior</u> que o Mini-Teste 4, que terá apenas 2 perguntas com 2 alíneas cada. O objetivo é ficar bem preparado.**)