ISCTE - IUL
Fundamentos de Álgebra Linear
Exercícios de Preparação para a Frequência

Licenciatura em Ciência de Dados
Ano Letivo 2020/2021, 1º trimestre

outubro de 2020

Nome do aluno:

Número do aluno:

Observações:

1. Duração da prova: 2h00.
2. Deve responder a todas as questões nos espaços reservados às respostas. **Justifique convenientemente todas as respostas.**
3. A prova deve ser efetuada **sem consulta**.
4. Só é permitida a utilização de material de escrita. Em particular, não é permitida a utilização de máquina de calcular. Só são corrigidas as respostas apresentadas a caneta.
5. Durante a prova não é permitido o uso de telemóveis ou quaisquer equipamentos eletrónicos.
6. Não destaque as folhas do teste.

Espaço reservado para cotações:

1ª Parte

Esta 1ª Parte é de **resposta rápida**, não devendo apresentar quaisquer cálculos ou justificações.

1. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$ uma matriz de entradas reais. Sabe-se que sistema de equações lineares $AX = \mathbf{0}$ tem por conjunto-solução o subespaço span$\{(1,2,3,4)\}$.

   (a) Indique a característica da matriz A. __________

   (b) Classifique o sistema $AX = B$ quanto ao número de soluções. __________

2. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ de entradas reais satisfaz $\det(A) = \dfrac{1}{2}$. Indique o valor dos seguintes determinantes:

   $\det(-2A) =$ ________ $\qquad \det\left(A^2 A^\top\right) =$ ________ $\qquad \det\left(A^{-1}\right) =$ ________

3. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2\}$ duas bases diferentes de $\mathbb{R}^2$. Considere:

   - $w = u_1 + 3u_2 \in \mathbb{R}^2$
   - $P = M(id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (a) Indique as coordenadas $[w]_{\mathcal{B}_2}$ ____________________

   (b) Indique as coordenadas $[u_1]_{\mathcal{B}_2}$ ____________________

4. Suponha que $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é uma matriz cujas colunas são vetores próprios linearmente independentes de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Determine o valor lógico (verdadeiro ou falso) de cada uma das seguintes afirmações. No caso da afirmação ser falsa, apresente um contra-exemplo.

   (a) A é invertível. ______________________________

   (b) A é diagonalizável. ______________________________

2ª Parte

Nas questões da 2ª Parte deverá apresentar o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z, e parâmetros reais α, β:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = \beta \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

   (a) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros reais α, β.

   (b) Calcule o determinante da matriz $\frac{1}{2}A$. O resultado é consistente com o resultado da alínea anterior? Justifique.

   (c) Considere $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ e resolva o sistema e represente o conjunto-solução na forma

$$X = P_0 + \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$$

   Mesma questão para $\alpha = -2$ e $\beta = -1$.

   (d) Considere $\alpha = \beta = 0$ e resolva o sistema:

      (i) usando (a);

      (ii) recorrendo à matriz inversa de A.

      (iii) pelo método de Cramer.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Encontre uma base para o subespaço nulo $N(A)$ de A, e uma base para o subespaço das colunas $C(A^\top)$ de $A^\top$.

   (b) Escreva o subespaço $C(A)$ como conjunto-solução de um sistema de equações lineares homogéneas.

3. Seja $S\{(1,0,-1),(1,1,2)\}$. Mostre $V = \{(x,y,z) : (x,y,z)\perp(1,0,-1) \text{ e } (x,y,z)\perp(1,1,2)\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e determine uma base para V.

4. Seja $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\}$.

   (a) Mostre que os vetores de $\mathcal{B}$ são ortogonais dois a dois.

   (b) Obtenha a partir de $\mathcal{B}$ uma base ortonormada $\mathcal{B}'$.
   (**Nota: Uma vez que já mostrou que são ortogonais basta obter os versores de cada um deles.**

   (c) Determine as coordenadas de $(3,1,1)$ na base $\mathcal{B}$.

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Indique a entrada $(2,4)$ de $Adj(A)$.

   (b) Verifique se o sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^\top$ é de Cramer e, caso seja, calcule a variável x_2, onde $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top$.

   (c) Caso A seja invertível, calcule a entrada $(3,1)$ de A^{-1}.

(3.0 val.) 6. Considere as funções lineares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x,y) = (2y, x, x+y) \ \text{ e } \ g(x,y,z) = (x+y+z, z).$$

(a) Determine $A = M(f; b.c, b.c)$ e $B = M(g; b.c, b.c)$.

(b) Determine $S = M(f \circ g; b.c, b.c)$ e $T = M(g \circ f; b.c, b.c)$.

(c) Verifique que $g \circ f$ é invertível e determine a matriz $M((g \circ f)^{-1}; b.c, b.c)$, bem como a expressão analítica de $(g \circ f)^{-1}$.

(d) Determine uma base de $\mathrm{Im}\,(f \circ g)$. Usando o teorema da dimensão determine a dimensão de $\ker\,(f \circ g)$. Será que $f \circ g$ é invertível? Justifique.

(e) Seja $\mathcal{B} = \{(1,1),(2,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $C = M(g; b.c, \mathcal{B})$ e use-a para calcular $[g(1,1,-2)]_{\mathcal{B}}$.

(f) Seja $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz $M = M(g; \mathcal{B}', \mathcal{B})$ e use-a para calcular $g([(1,2,3]_{\mathcal{B}'})$. Represente o valor de $g([(1,2,3]_{\mathcal{B}'})$ na base canónica.

(3.0 val.) 7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por $f(x,y) = (x+2y, 2x+y)$.

(a) Determine os polinómios característicos de A e de f, bem como os vetores próprios de A e de f.

(b) Determine os subespaços próprios de A e de f.

(c) Verifique se A e f são diagonalizáveis. Caso sejam, determine as matrizes diagonais D_1, D_2 e as matrizes invertíveis P, Q tais que $D_1 = P^{-1}AP$ e $D_2 = Q^{-1}BQ$, onde $B = M(f; b.c, b.c)$.

(Nota: não precisa verificar as equações $D_1 = P^{-1}AP$ e $D_2 = Q^{-1}BQ$, bastando indicar quais são as matrizes D_1, D_2, P e Q).

(d) Sem calcular B^{-1}, encontre os valores próprios de B^{-1} e diga quais os vetores próprios associados.

(e) Indique os valores próprios de A^{10} e diga quais os vetores próprios associados. **(Nota: não precisa, obviamente, de calcular A^{10}).**