

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática I

LCD – Licenciatura em Ciência de Dados

27/01/2022 – Parte I (75%)

Tipo de Prova: Exame final (1ª Época): Parte I + Parte II
Frequência: Parte I

Duração máxima: 3 H
Duração máxima: 2 H

Nome Completo
(em maiúsculas)

Número

Turma

-
- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
 - Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
 - Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
 - Não se tiram dúvidas durante a prova.
 - Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
 - A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
 - Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.
-

Reservado para cotações.

1. a)
b)

2.

3.

4.

5. a)
b)
c)

6. a)
b)

c)

7. a)
b)

(2.5 valores) 1. Calcule, caso exista (ou justifique se não existir) o limite de cada uma das seguintes sucessões reais:

(1.0) a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

(1.5) b) $v_n = \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$

(1.5 valores) 2. Um lago contém inicialmente uma população de 2000 peixes. Sabe-se que essa população cresce ao ritmo de 5% por mês, mas que, em cada mês, 150 indivíduos dessa população não sobrevivem e são conseqüentemente retirados do lago. Escreva uma fórmula de recorrência (sucessão) que lhe permita saber o número de peixes disponíveis no lago em cada mês. Justifique convenientemente a sua resposta.

(1.5 valores) 3. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1 - \exp(-x^2)}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determine o valor de k de modo a que f seja contínua em todo o seu domínio.

(2.5 valores) 4. Escreva a fórmula de Taylor até aos termos de 2ª ordem para a função

$f(x) = \ln(\sin x)$, em torno do ponto $a = \frac{\pi}{2}$.

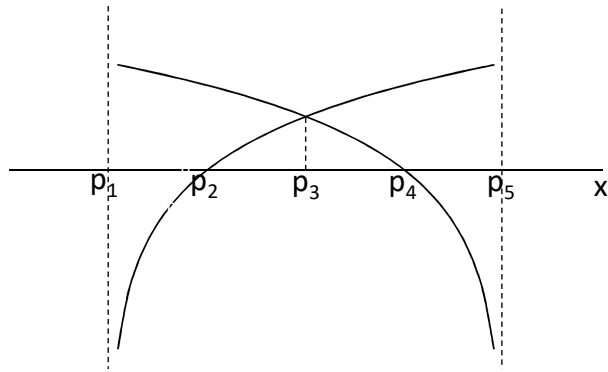
(5.0 valores) 5. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções reais:

(1.0) a) $\frac{\tan(\ln x)}{x}$

(2.0) b) $\frac{4x - 3}{(2x + 1)(1 + x^2)}$

(2.0) c) $e^{-x} \sin(x)$

(5.0 valores) 6. Considere o seguinte gráfico, representado no plano XOY, no qual se omite o eixo dos YY:



- (2.0) a) Identifique nele as curvas $y = 0$, $y = \ln(3 - x)$ e $y = \ln(x + 1)$ e, justificadamente, os pontos p_1 , p_2 , p_3 , p_4 e p_5 .
- (1.0) b) Escreva uma expressão integral que permite calcular a área limitada pelas curvas referidas na alínea anterior.
- (2.0) c) Sabendo que $\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x$, indique, sem calcular qualquer integral, o valor dessa área.
(Sugestão: desloque, de uma certa quantidade, o gráfico para a direita, e indique essa quantidade).

(2.0 valores) 7. Considere o seguinte integral indefinido

$$\varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} \, dt,$$

com o domínio restringido ao intervalo $[0, \pi/2]$. Sem resolver o integral,

- (1.0) a) Indique, justificadamente, o valor de $\varphi(\pi/4)$.
- (1.0) b) Mostre que a função $\varphi'(x)$ é na verdade uma constante e determine-a.

