ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática I

LCD – Licenciatura em Ciência de Dados

30/01/2020 – Parte I (75%)

Tipo de Prova: Exame final (2ª Época): Parte I + Parte II   Duração (Parte I): 1h 45m

Nome Completo ....
(em maiúsculas)

Número ....   Turma ....

- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tiram dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

Reservado para cotações.

1. a1)
   a2)
   b)
2.
3. a)
   b)
   c)
4. a)
   b)
5. a)
   b)

(4.5 valores) 1.

(3.0) a) Estude quanto à existência de limite as seguintes sucessões:

(1.5) a1) $u_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$

(1.5) a2) $v_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

(1.5) b) Use o conceito de subsucessão para mostrar que a sucessão $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots\dots, 0, n, \dots$ não tem limite.

(2.0 valores) 2. Escreva a fórmula de Taylor até aos termos de 3ª ordem para a função $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \sin x$, em torno do ponto 0.

(6.0 valores) 3. Determine uma de primitiva de cada uma das seguintes funções reais:

(2.0) a) $x \ln(x)$

(1.5) b) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

(2.5) c) $\dfrac{1}{(x^2-1)(x+1)}$

(4.0 valores) 4. Considere a área da região plana de $\mathbb{R}^2$, limitada pelas linhas de equações

$$y = \exp(-x), \qquad y = \exp\ (x) \quad \text{e} \quad y = e$$

(1.5) a) Represente graficamente essa região.

(2.5) b) Calcule a respetiva área.

(3.5 valores) 5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(1.5) a) $\frac{dy}{dx} = -2xy^2, y(0) = -1.$

(2.0) b) $y' + \frac{y}{x} - \frac{\text{cotg}(x)}{x} = 0, y(2\pi) = \frac{1}{2}.$

Folha de rascunho