ISCTE - IUL
Álgebra
Exame/Frequência

Licenciatura em Informática e Gestão de Empresas.
Ano Letivo 2016/2017, 1º semestre

3 de Janeiro de 2017

Nome do aluno: Número do aluno:

Curso e Turma:

Cotações:

Grupo I.	1	2	3	4
	5	6	7	8
Grupo II.	1(a)	(b)	(c)	
	2.(a)	(b)		
	3.(a)	(b)		
Grupo III.	4.(a)	(b)	(c)	
	5.(a)	(b)	(c)	
	6.(a)	(b)	(c)	

Observações:

1. Duração da Frequência: 1h00 + 15min tolerância. Duração do Exame: 2h30.
2. A prova é constituída pelas partes I, II e III. Os alunos em **Frequência** devem fazer **apenas a parte III**. Os alunos em **Exame** devem fazer **as três partes (I, II e III)**.
3. A cotação apresentada corresponde ao Exame, sendo o dobro para a Frequência.
4. Deve responder a todas as questões nos espaços reservados às respostas. **Justifique convenientemente todas as respostas.**
5. A prova deve ser efectuada **sem consulta.**
6. Respostas ilegíveis serão anuladas.
7. Só é permitida a utilização de material de escrita. Em particular, não é permitida a utilização de máquina de calcular. Só são corrigidas as respostas apresentadas a caneta.

8. Não é permitida a utilização de auscultadores ou telemóveis durante a realização da prova.

9. Não destaque as folhas do teste.

GRUPO I (EXAME)

(0.25 val.) 1. Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}$ em forma de escada e com $r(A) = 1$, o sistema de equações lineares $AX = Y$ pode ser:

- ☐ Possível e determinado
- ☐ Possível e indeterminado, com 1 variável livre
- ☒ Possível e indeterminado, com 4 variáveis livres
- ☐ Possível e determinado, com 1 variável livre

(0.25 val.) 2. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{40\times 40}$ matrizes tais que

$$\det(A) = k \neq 0 \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ 1 & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

Então, a entrada $(B(A - A^\top))_{40,40}$ é:

- ☐ 1
- ☐ k
- ☐ k^{40}
- ☒ 0

(0.25 val.) 3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que:

- ☐ $\dim N\left(A^\top\right) = 0$
- ☐ $\dim N\left(A^\top\right) = 2$
- ☒ $\dim N\left(A^\top\right) = 1$
- ☐ $\dim N\left(A^\top\right) = 3$

(0.25 val.) 4. Seja $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Considere o vetor $w = u_1 + 2u_2 \in \mathbb{R}^2$ e a matriz $A = M(id; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2\}$ é outra base de $\mathbb{R}^2$, diferente de $\mathcal{B}_1$. Então:

☒ $[w]_{\mathcal{B}_2} = (-1, 2)_{\mathcal{B}_2}$
☐ $[w]_{\mathcal{B}_2} = (3, 2)_{\mathcal{B}_2}$
☐ $[w]_{\mathcal{B}_2} = (1, 2)_{\mathcal{B}_2}$
☐ $[w]_{\mathcal{B}_2} = (2, -1)_{\mathcal{B}_2}$

(0.25 val.) 5. Considere a função linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z, w) = (x + w, x - y, z).$$

Sabendo que $T(u) = (-1, 1, 3)$ e $T(v) = (1, 0, 1)$, para certos vetores $u, v \in \mathbb{R}^4$, e que $\dim \ker T = 1$, tem-se:

☐ $T(u - 2v) = (-3, 1, 1)$ e $\dim \operatorname{im} T = 2$
☐ $T(u - 2v) = (-2, -4, 1)$ e $\dim \operatorname{im} T = 2$
☐ $T(u - 2v) = (-2, -4, 1)$ e $\dim \operatorname{im} T = 3$
☒ $T(u - 2v) = (-3, 1, 1)$ e $\dim \operatorname{im} T = 3$

(0.25 val.) 6. Sejam $B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ matrizes invertíveis. Suponha que $\det(B) = 8$ e que C é uma matriz triangular superior cujas entradas da diagonal principal são todas iguais a 2. O valor do $\det(2B^\top C^{-1})$ é:

☒ 8
☐ -2
☐ -8
☐ 2

(0.25 val.) 7. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times3}$ tal que:

- A não é invertível;
- $A\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$;
- $(0,-1,0)$ é vetor próprio de A.

Considere as seguintes afirmações:

(I) $\det(A+4I_3)=0$.

(II) $(0,4,-4)$ é vetor próprio associado ao valor próprio 3.

(III) A tem três valores próprios distintos.

Então:

- ☐ (I) é verdadeira, (II) e (III) são falsas
- ☐ (I) e (III) são verdadeiras, (II) é falsa
- ☐ (I), (II) e (III) são falsas
- ☒ (I), (II) e (III) são verdadeiras

(0.25 val.) 8. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n$, com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Então, podemos afirmar que:

- ☐ A série é divergente, para todo $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- ☐ A série é convergente, para todo $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- ☐ A série é convergente, para $a \in]-3,3[\setminus\{0\}$.
- ☒ A série é convergente, para $a \in]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$.

GRUPO II (EXAME)

(4.0 val.) 1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z, e parâmetros reais α, β:

$$A = \begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y + 4z = \beta + 1 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 2 \end{cases}$$

(0.5 val.) (a) Escreva a equação matricial do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 4 \\ \alpha & \alpha & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta+1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2.5 val.) (b) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros reais α e β.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & 4 & \beta+1 \\ \alpha & \alpha & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \alpha L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-2 & 4-2\alpha & \beta-1 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right]$$

1) $\alpha - 2 \neq 0 \wedge 4 - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -2$

$\left.\begin{array}{l} \nexists \text{ linhas } 0 \ 0 \ 0 \mid k \neq 0 \\ R(A) = 3 = \text{nº incóg.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ SPD

2) $\alpha = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

- $\beta - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 1$
  $\exists$ linha $0 \ 0 \ 0 \mid \beta - 1 \neq 0 \Rightarrow$ S.I.
- $\beta = 1$
  $\left.\begin{array}{l} \nexists \text{ linhas } 0 \ 0 \ 0 \mid k \neq 0 \\ R(A) = 1 < 3 = \text{nº incógn.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ S.P.I

3) $\alpha = -2$

3^{a} linha : $0 \ 0 \ 0 \mid 4 \Rightarrow$ S.I.

Conclusão:

SPD se $\alpha \neq -2, 2$, $\beta \in \mathbb{R}$

SPI se $\alpha = 2 \wedge \beta = 1$

SI se $(\alpha = 2 \wedge \beta \neq 1)$ ou $(\alpha = -2 \wedge \beta \in \mathbb{R})$

(1.0 val.) (c) Considerando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, resolva o sistema, apresentando o respetivo conjunto-solução na forma

$$P_0 + \mathrm{Span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

$\alpha = 2, \beta = 1 \underset{(b)}{\Longrightarrow}$ SPI, equivalente a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x + y + 2z = 1 \Longrightarrow x = 1 - y - 2z$$

$$\text{C.S.} = \{(1-y-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= (1,0,0) + \mathrm{Span}\{(-1,1,0), (-2,0,1)\}$$

(2.0 val.) 2. Considere a matriz

$$K = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

(1.0 val.) (a) Calcule para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a matriz é invertível.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - aL_3]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right]$$

K invertível $\Leftrightarrow R(K) = 4 \Leftrightarrow 1-a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$

(1.0 val.) (b) Para $a = 0$ determine K^{-1}.

$$a = 0 \underset{(a)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_3]{} \left[\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{= I} \middle| \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{= K^{-1}}\right]$$

(2.0 val.) 3. Considere o conjunto $\mathcal{S} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+c=0,\ b=0\}$.

(1.0 val.) (a) Mostre que $\mathcal{S}$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

$$(a,b,c,d) \in S \underset{\substack{a=-c \\ b=0}}{\Leftrightarrow} (a,b,c,d) = (-c,0,c,d) \; ; \; c,d \in \mathbb{R}$$

Logo,

$$S = \{(-c,0,c,d) : c,d \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1,0,1,0),(0,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$$

pelo que se conclui que S é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(1.0 val.) (b) Indique uma base de $\mathcal{S}$ e determine as coordenadas do vetor $u = (-2,0,2,3)$ na base indicada.

$(-1,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ são geradores de S (por (a)) e são lineares independentes (não são múltiplo escalar um do outro)

Logo, uma base de S é:

$$\mathcal{B} = \{(-1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow (-2,0,2,3) = 2(-1,0,1,0) + 3(0,0,0,1)$$

$$= (2,3)_{\mathcal{B}}$$

GRUPO III (FREQUÊNCIA/EXAME)

(3.75 val.) 4. Considere a função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x+2y, x+y)$.

(0.75 val.) (a) Determine $A = M(f; b.c, b.c)$.

$$A = \begin{bmatrix} f(1,0) & f(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1.5 val.) (b) Determine a expressão analítica de $f^{-1}(x,y)$ e calcule $f^{-1}(1,2)$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 + 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to -L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x,y) = A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-x+2y, x-y)$$

Em particular,

$$f^{-1}(1,2) = (-1+2\cdot 2, 1-2) = (3,-1)$$

(1.5 val.) (c) Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2)\}$ $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $Q = M(id; \mathcal{B}, b.c)$ e use-a para obter $C = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C = Q^{-1} A Q$$

$$\begin{tikzcd} \underset{b.c.}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"', "A"] & \underset{b.c.}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "Q^{-1}"] \\ \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "Q"] \arrow[r, "f"', "C"] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

$$Q^{-1}: \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(3.25 val.) 5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(1.0 val.) (a) Mostre que $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vetores próprios de A associados ao mesmo valor próprio. Identifique esse valor próprio.

$$Au_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3u_1$$

$$Au_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot u_2$$

$\Rightarrow$ u_1, u_2 são vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3$

(1.25 val.) (b) Mostre que $\lambda = 1$ é valor próprio de A e indique um vetor próprio que lhe esteja associado.

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 2 - (-2) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ é valor próprio de } A$$

$$(A - I)v = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow v = (2z, -z, z),\ z \neq 0 \Rightarrow \text{Um vetor próprio é } (2, -1, 1)$$

(1.0 val.) (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $D = P^{-1}AP$.

A é diagonalizável porque $\{(1,1,0), (1,0,1), (2,-1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituído por vetores próprios de A. Tem-se, neste caso:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.0 val.) 6. Determine a natureza das séries numéricas:

(0.75 val.) (a) $\sum_{n\geq 5} \frac{n^4-n+1}{(n^2-1)(3n+1)}$

$$a_n = \frac{n^4-n+1}{(n^2-1)(3n+1)} = \frac{n^4-n+1}{3n^3+n^2-3n-1} \longrightarrow +\infty \neq 0$$

Pelo critério de divergência, a série é divergente.

(1.25 val.) (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+5}{n^2}$

$$a_n = \frac{n+5}{n^2} \geq 0$$

$$a_n = \frac{n+5}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} \geq \frac{1}{n} = b_n \geq 0$$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ é divergente (harmónica)

Pelo critério de comparação, a série $\sum a_n$ também é divergente. NOTA: alternativa, podia usar-se o critério do limite, tomando $b_n = \frac{1}{n}$.

(1.0 val.) (c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

$a_n = (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq 0 \Longrightarrow$ a série dada é uma série alternada.

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_n \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

b_n é decrescente: $b_{n+1} = \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}} = b_n$

Pelo critério de Leibniz, a série converge.

$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ e $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$

$\sum \frac{1}{2n}$ é divergente (é da mesma natureza que a série harmónica)

Pelo critério de comparação, $\sum |a_n|$ também diverge. Logo, $\sum a_n$ é simplesmente convergente.

Folha de rascunho

Folha de rascunho