ISCTE - IUL
Álgebra
Exame/Frequência

Licenciatura em Informática e Gestão de Empresas
Ano Letivo 2018/2019, 1º semestre

19 de janeiro de 2019

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Curso e Turma:

Cotações:

1.a)	b)	c)	d)	e)	
2.a)	b)	c)			
3.a)	b)	c)	d)		
4.1.a)	b)	c)	4.2.a)	b)	c)
4.3.a)	b)	c)			
5.a)	b)	c)	6.a)	b)	c)
7.a)	b)	8.a)	b)		

Observações:

1. Duração da Frequência: 1h30. Duração do Exame: 2h30.
2. A prova é constituída pelas partes A e B. Os alunos em **Frequência** devem fazer **apenas a parte B**. Os alunos em **Exame** devem fazer **ambas as partes A e B**.
3. A cotação apresentada corresponde ao Exame, sendo o dobro para a Frequência.
4. Deve responder a todas as questões nos espaços reservados às respostas. **Justifique convenientemente todas as respostas.**
5. A prova deve ser efectuada **sem consulta**.
6. Respostas ilegíveis serão anuladas.
7. Só é permitida a utilização de material de escrita. Em particular, não é permitida a utilização de máquina de calcular. Só são corrigidas as respostas apresentadas a caneta.

8. Não é permitida a utilização de auscultadores ou telemóveis durante a realização da prova.
9. Não destaque as folhas do teste.

PARTE A - GRUPO I (EXAME)

1. **Neste grupo deve apenas indicar a resposta no espaço respetivo, não sendo necessário apresentar quaisquer cálculos ou justificações.**

(2.5 val.) Sejam A, B matrizes com entradas reais tais que:

- $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ é uma matriz não invertível;
- $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ é uma matriz invertível.

(0.5 val.) (a) Quanto à dependência linear, as colunas da matriz AB são ________________

(0.5 val.) (b) Quanto à classificação, os sistemas $AX = 0$ e $BX = 0$ são, respetivamente, ____________________ e ____________________

(0.5 val.) (c) Sabendo que a solução do sistema homogéneo $AX = 0$ tem uma variável livre, a caracterísitica de A é __________

(0.5 val.) (d) O conjunto $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ e uma possível base é dada por __________________

(0.5 val.) (e) O conjunto $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ porque __________________

PARTE A - GRUPO II (EXAME)

(4.0 val.) 2. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + y + \alpha z = \alpha + \beta \\ 2\alpha x + (\alpha^2 + 1)y + 2z = 3\beta \end{cases},$$

onde α, β são parâmetros reais.

(0.5 val.) (a) Escreva a equação matricial do sistema.

(2.5 val.) (b) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros reais α e β.

(1.0 val.) (c) Resolva o sistema para $\alpha = -1$ e $\beta = 0$. Interprete geometricamente o conjunto-solução resentando-o na forma

$$P_0 + \mathrm{Span}\{u_1, ..., u_k\}.$$

(3.5 val.) 3. Sejam $u_1 = (m, n, 1), u_2 = (1, 2, m), u_3 = (1, 0, m)$ as colunas de $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(1.0 val.) (a) Calcule o determinante de B. A invertibilidade de B depende do valor de n? Justifique.

(0.5 val.) (b) Para que valores de m, n os vetores u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes? Justifique.

(1.0 val.) (c) Determine a matriz inversa de B para $m = n = 0$.

(1.0 val.) (d) Para $m = n = 0$, determine a matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $BX = C$, onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

PARTE B - GRUPO I (FREQUÊNCIA/EXAME)

4. **Neste grupo deve apenas indicar a resposta no espaço respetivo, não sendo necessário apresentar quaisquer cálculos ou justificações.**

(0.75 val.) 4.1 Considere as funções lineares f e g tais que:

$$f(1,1) = (3,2)\ ,\ f(1,0) = (1,1) \ \text{ e } \ g(x,y) = (x-y,0)$$

(0.25 val.) (a) O valor de $f(0,1)$ é __________

(0.25 val.) (b) O vetor não nulo $v =$ __________ é um elemento do núcleo de g.

(0.25 val.) (c) Podemos concluir que $\dim Im\, g =$ __________

(0.75 val.) 4.2 Seja V um espaço vetorial, $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de V, com

$$v_1 = u_1,\ v_2 = u_1 + u_2,\ v_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

Então:

(0.25 val.) (a) A dimensão de $U = \operatorname{span}\{u_1,\ u_1 + u_2,\ 3u_1\}$ é __________

(0.25 val.) (b) A matriz $P = M(id; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ é dada por:

$$P =$$

(0.25 val.) (c) Se $w = v_1 - v_2 + 2v_3$, então $[w]_{\mathcal{B}_1} =$ ______________

(1.0 val.) 4.3 Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma função linear e $A = M(f; b.c, b.c)$ tal que:

$$\dim N(A-2I) = 1\ ,\ \dim N(A-3I) = 2\ ,\ \dim N(A+4I) = 1$$

(0.25 val.) (a) Os valores próprios de A são __________________

(0.25 val.) (b) O valor do determinante de A é $\det A =$ __________

(0.5 val.) (c) Se u, v são vetores não nulos de $\mathbb{R}^4$ tais que $Au = 3u$ e $Av = 2v$, então, $f^{-1}(u) =$ ______________ e $(f \circ f \circ f)(v) =$ ______________

PARTE B - GRUPO II (FREQUÊNCIA/EXAME)

(2.5 val.) 5. Considere a função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y, x - 2y)$.

(0.5 val.) (a) Determine $A = M(f; b.c, b.c)$.

(1.0 val.) (b) Determine a expressão analítica de $(f \circ f)(x, y)$ e calcule $(f \circ f)(1, 1)$.

(1.0 val.) (c) Considere a base $\mathcal{B} = \{(2, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $S = M(id; b.c, \mathcal{B})$ e use-a para obter $B = M(f; b.c, \mathcal{B})$.

(3.0 val.) 6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(0.5 val.) (a) Determine o polinómio característico, $p(\lambda)$, e calcule os valores próprios de A.

(1.0 val.) (b) Determine os subespaços próprios de A.

(1.0 val.) (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $D = P^{-1}AP$. Indique ainda, sem calcular explicitamente, como poderia obter uma matriz B tal que $B^2 = A$.

(1.5 val.) 7. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries numéricas. Caso seja convergente, justifique se a convergência é simples ou absoluta.

$$a) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \ , \qquad b) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

(1.0 val.) 8. Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de números reais positivos tal que $\lim a_n = +\infty$. Estude a convergência das seguintes séries:

$$a) \ \sum \frac{a_n}{a_n+1} \ , \qquad b) \ \sum \frac{1}{n^2 a_n}$$

Folha de rascunho

Folha de rascunho