ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática I

LCD – Licenciatura em Ciência de Dados

17/01/2022 – Parte I (75%)

Tipo de Prova: Exame final (1ª Época): Parte I + Parte II — Duração máxima: 3 H
Frequência: Parte I — Duração máxima: 2 H

Nome Completo ....
(em maiúsculas)

Número .... Turma ....

- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tiram dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

Reservado para cotações.

1. a)	5. a)
b)	b)
	c)
2.	
	6. a)
3.	b)
	c)
4.	d)
	7. a)
	b)

(3.0 valores) 1. Calcule, caso exista, o limite de cada uma das seguintes sucessões reais:

(1.0) a) $u_n = (-1)^n$

(2.0) b) $v_n = \dfrac{2^n\, n!}{n^n}$ (Sugestão: Calcule o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$, e conclua)

(1.0 valores) 2. Use o teorema do limite de sucessões enquadradas para concluir que a sucessão $x_n = \frac{\sin(n)}{n}$ é um infinitésimo.

(2.0 valores) 3. Seja $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & se \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(x + k) & se \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Determine k de modo que f seja contínua no intervalo $[0, \pi]$. Justifique.

(2.0 valores) 4. Escreva a fórmula de Taylor até aos termos de 2ª ordem para a função $f(x) = \arctan(x)$, em torno do ponto $x = 1$.

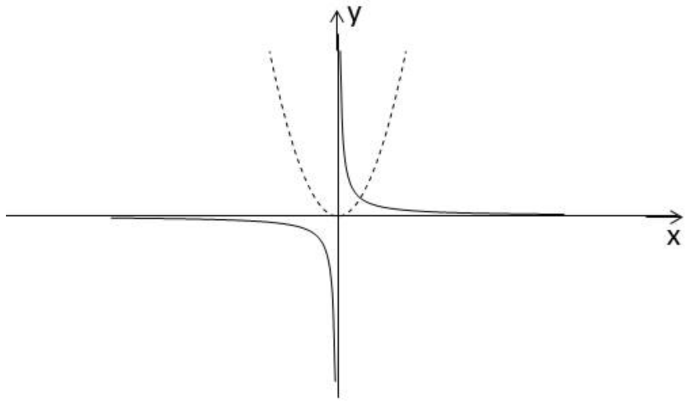
(5.5 valores) 5. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções reais:

(1.5) a) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(1.5) b) $x \sin(x)$

(2.5) c) $\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ (Sugestão: faça $t^2 = 1 - x$)

(4.0 valores) 6. Na figura que se segue encontram-se representadas duas curvas: $y = \frac{1}{x}$ e $y = x^2$.



(0.5) a) Identifique cada uma destas curvas.

(0.5) b) Determine o único ponto de interseção das mesmas.

(1.5) c) Escreva uma expressão integral que lhe permita calcular a área da região do plano limitada pelas curvas:

$$y = \frac{1}{x}\,,\ y = x^2,\ y = 0 \ \text{ e } x = 2.$$

(1.5) d) Calcule essa área.

(2.5 valores) 7 . Considere a função $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pelo integral indefinido

$$F(x) = \int_0^x (t^2 + 1)\ \mathrm{d}t$$

(1.0) a) Mostre que F é uma função ímpar, isto é, $F(-x) = -F(x)$.

(1.5) b) <u>Sem calcular o integral</u>, justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$, e diga quanto vale $F'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Folha de rascunho