ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática I

LCD – Licenciatura em Ciência de Dados

17/01/2022 – Parte I (75%)

Tipo de Prova: Exame final (1ª Época): Parte I + Parte II — Duração máxima: 3 H
Frequência: Parte I — Duração máxima: 2 H

Nome Completo ....
(em maiúsculas)

Número .... Turma ....

Proposta de resolução

- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tiram dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

Reservado para cotações.

1. a)
   b)
2.
3.
4.
5. a)
   b)
   c)
6. a)
   b)
   c)
   d)
7. a)
   b)

(3.0 valores) 1. Calcule, caso exista, o limite de cada uma das seguintes sucessões reais:

(1.0) a) $u_n = (-1)^n$

(2.0) b) $v_n = \dfrac{2^n\, n!}{n^n}$ (Sugestão: Calcule o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$, e conclua)

a) A sucessão $u_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ +1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

não é convergente (isto é, o limite não existe) porque possui subsucessões com limites distintos. (Se fosse convergente todas as suas subsucessões teriam de ser também convergentes e convergir para o mesmo limite, mas não é esse o caso)

Prova: considerem-se as sucessões dos números ímpares e dos números pares, respectivamente:

$$a_n = 2n-1 \quad , \quad b_n = 2n.$$

A subsucessão $u \circ a$ tem como termo geral $(u\circ a)_n = u(a_n) = -1$. É portanto uma sucessão constante, logo o seu limite é -1.
Por outro lado, a subsucessão $u\circ b$ tem como termo geral $(u\circ b)_n = u(b_n) = (-1)^{2n} = +1$. Logo o seu limite é $+1$.
Assim $\lim (u\circ a)_n = -1 \neq \lim (u\circ b)_n = +1 \Rightarrow u_n$ não pode ser convergente.

b) Se $v_n = \dfrac{2^n\, n!}{n^n}$ (>0) então $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}(n+1)!}{\left(\frac{2}{n}\right)^n n!} = \dfrac{2}{\cancel{n+1}}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \cdot \cancel{(n+1)}$

Assim,
$$= 2\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = 2 \lim\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n,$$

onde definimos $x_n := -\dfrac{n}{n+1}$. Uma vez que $x_n \longmapsto -1$ sabemos que o limite que pretendemos calcular dá origem à exponencial avaliada em -1:

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2\lim\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = 2\exp(-1) = \frac{2}{e} < 1$$
(pois $e = 2.7\ldots$)

Sendo este limite menor do que 1, concluímos que v_n é um infinitésimo. Ou seja, $\lim v_n = 0$

(1.0 valores) 2. Use o teorema do limite de sucessões enquadradas para concluir que a sucessão $x_n = \frac{\sin(n)}{n}$ é um infinitésimo.

Uma vez que

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq x_n = \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Ou seja, x_n está enquadrada entre as sucessões $-\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n}$. Ambas estas sucessões têm como limite o mesmo valor, nomeadamente

$$\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = -\lim \frac{1}{n} = 0 = \lim \frac{1}{n}.$$

Pelo teorema do limite de sucessões enquadradas, então x_n tem que ter o mesmo limite:

$$\lim x_n = 0 \;//$$

(2.0 valores) 3. Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & se \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos(x+k) & se \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Determine k de modo que f seja contínua no intervalo $[0, \pi]$. Justifique.

Para que f seja contínua em $[0, \pi]$ é preciso que seja contínua em todos os pontos desse intervalo.

A função ~~está~~ definida por dois ramos, cada qual sendo uma função contínua. Portanto, apenas resta averiguar a continuidade no ponto $x = \pi/2$.

Para que seja contínua nesse ponto tem que se verificar:

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}^-\right) = f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\tfrac{\pi}{2}^+\right)$$

- $f\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos(x+K) \overset{\text{porque } \cos x \text{ é contínua}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} + K\right) = \overbrace{\cancel{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}}^{0}\cos(K) - \overbrace{\cancel{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}}^{1}\sin(K)$

$$= -\sin(K)$$

Portanto continuidade no ponto $x = \frac{\pi}{2}$ implica

$$1 = -\sin(K) \iff \sin(K) = -1 \iff K = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \,, \; n \in \mathbb{Z}$$

Para tais valores de K teremos

$$\cos(x+K) = \cos(x)\cos(K) - \sin(x)\sin(K) =$$

$$= \cos(x)\overbrace{\cancel{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}}^{0} - \sin(x)\overbrace{\cancel{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}}^{-1} =$$

$$= \sin(x)$$

Ou seja, os dois ramos têm de ser exatamente iguais.

(2.0 valores) 4. Escreva a fórmula de Taylor até aos termos de 2ª ordem para a função $f(x) = \arctan(x)$, em torno do ponto $x = 1$.

$$f(x) = \arctan(x) \longrightarrow f(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \longrightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \longrightarrow f''(1) = -\frac{1}{2}$$

Deste modo, a fórmula de Taylor desta função, de segunda ordem e em torno do ponto $x=1$, é

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + r_2(x)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{1}{4}(x-1)^2 + r_2(x)$$

onde $r_2(x) = o(x-1)^2$.

(5.5 valores) 5. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções reais:

(1.5) a) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(1.5) b) $x\sin(x)$

(2.5) c) $\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ (Sugestão: faça $t^2 = 1 - x$)

a) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx =$

Procedemos pelo método da substituição:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t \\ \Rightarrow x = t^2 \\ \Rightarrow dx = 2t\, dt \end{cases}$$

$= \int \frac{\cos(t)}{\cancel{t}} 2\cancel{t}\, dt =$

$= 2\int \cos(t)\, dt =$

$= 2\sin(t) + c = 2\sin(\sqrt{x}) + c$ //

Onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante qualquer.

b) Para esta alínea procedemos através de integração por partes:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v = -\cos(x) \Leftarrow v' = \sin(x) \end{cases}$$

$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin(x)}_{v'}\, dx =$

$= u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx = -x\cdot\cos(x) - \int 1\cdot(-\cos(x))\, dx$

$= -x\cdot\cos(x) + \int \cos(x)\, dx = -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + c.$ //

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante qualquer.

c) Para esta alínea primeiro recorremos ao método da substituição e depois ao método das frações parciais:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx = \qquad \begin{cases} \sqrt{1-x} = t \\ \Rightarrow x = 1-t^2 \\ \Rightarrow dx = -2t\,dt \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{(1-t^2)\cancel{t}}(-2\cancel{t})\,dt = -2\int \frac{1}{(1+t)(1-t)}\,dt =$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+B(1+t)}{(1+t)(1-t)} = \frac{t\overbrace{(B-A)}^{=0} + \overbrace{(A+B)}^{=1}}{(1+t)(1-t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B-A=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= -2\int \left(\frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t}\right)dt =$$

$$= -\int \frac{1}{1+t}\,dt - \int \frac{1}{1-t}\,dt =$$

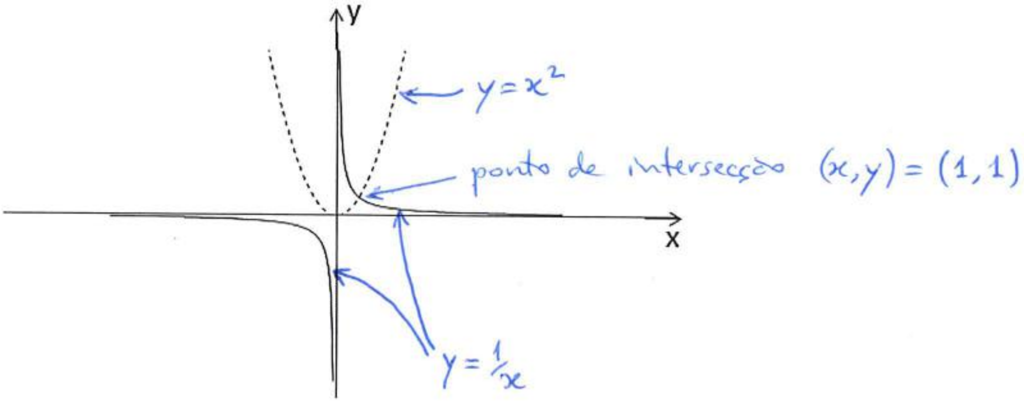
$$= -\ln|1+t| + \ln|1-t| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + c$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante qualquer.

(4.0 valores) 6. Na figura que se segue encontram-se representadas duas curvas: $y = \frac{1}{x}$ e $y = x^2$.



(0.5) a) Identifique cada uma destas curvas.

(0.5) b) Determine o único ponto de interseção das mesmas.

(1.5) c) Escreva uma expressão integral que lhe permita calcular a área da região do plano limitada pelas curvas:

$$y = \frac{1}{x},\ y = x^2,\ y = 0 \text{ e } x = 2.$$

(1.5) d) Calcule essa área.

a) Ver figura.

b) Para achar o ponto de intersecção, igualamos as duas expressões:

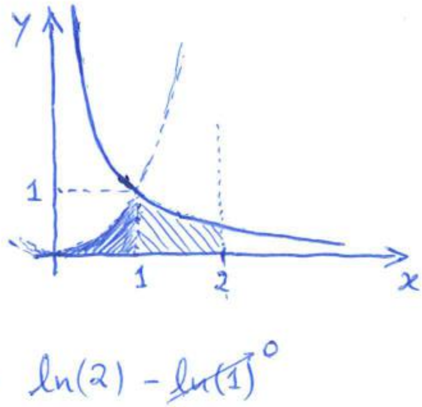
$\frac{1}{x} = x^2 \iff x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \qquad y(1) = \left\{ \begin{matrix} 1/1 = 1 \\ 1^2 = 1 \end{matrix} \right\} = 1$

Logo o ponto de intersecção é $(1,1)$. //

c) A região delimitada pelas quatro curvas está representada à direita →
Uma expressão integral que calcula a sua área é a seguinte:

$$A = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$ //

Detalhe da figura:



d) $A = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\ln x \right]_1^2 = \left(\frac{1^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}^{\,0} \right) + \ln(2) - \cancel{\ln(1)}^{\,0}$

$= \frac{1}{3} + \ln(2)$ //

(2.5 valores) 7 . Considere a função $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pelo integral indefinido

$$F(x) = \int_0^x (t^2 + 1)\ dt$$

(1.0) a) Mostre que F é uma função ímpar, isto é, $F(-x) = -F(x)$.

(1.5) b) Sem calcular o integral, justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$, e diga quanto vale $F'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Avaliemos o lado esquerdo da equação, $F(-x)$, e mostremos que é igual ao lado direito:

$$F(-x) = \int_0^{-x} (t^2 + 1)\, dt$$

substituição: $t = -s$
$\Rightarrow dt = -ds$

$$= \int_0^x \left((-s)^2 + 1\right)(-1)\,ds = -\int_0^x (s^2+1)\,ds$$

s é variável muda
$\Rightarrow$ em vez de s podemos usar t

$$= -\int_0^x (t^2+1)\,dt = -F(x)$$

[Nota: poder-se-ia calcular explicitamente $F(-x)$ e $-F(x)$ e verificar que são iguais]

b) A função integranda, t^2+1, é contínua, pois é um polinómio. Logo (pelo teorema T2.21) é também integrável.

Então, o primeiro teorema fundamental do cálculo integral (T2.30) garante que a derivada $F'(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$ (ou seja, F é diferenciável em $\mathbb{R}$) e tem-se

$$F'(x) = x^2 + 1 .$$

Folha de rascunho