ANÁLISE MATEMÁTICA II

2019 - 2020

ETI, ETI-PL, LEI e LEI-PL

Caderno 3

INTEGRAIS DUPLOS E VOLUMES

Elaboração: ROSÁRIO LAUREANO

DM – Departamento de Matemática

ISTA – Escola de Tecnologias e Arquitetura

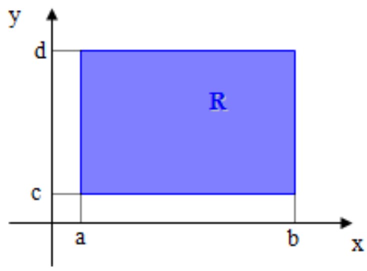
1 Integral duplo: definição e cálculo

Conhecemos o integral numa variável, ou integral simples, e a sua definição através de somas de Riemann. Como tal, para funções não-negativas no intervalo de integração, o integral simples calcula a área abaixo de uma curva.

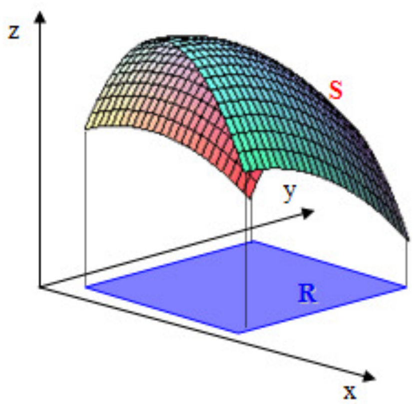
Vamos agora aplicar uma construção semelhante para calcular o volume abaixo de uma superfície. Essa construção também utiliza somas de Riemann e conduz à definição de integral duplo (para funções com duas variáveis). Contudo, convém salientar que a aplicação de integrais duplos não se restringe ao cálculo de volumes. No próximo caderno (Caderno 4 - Aplicação de Integrais Duplos) veremos outras aplicações. No que segue, as figuras ilustram o texto imediamente anterior (e foram retiradas de fontes bibliográficas diversas).

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Para facilitar a construção, comecemos por considerar f definida no retângulo

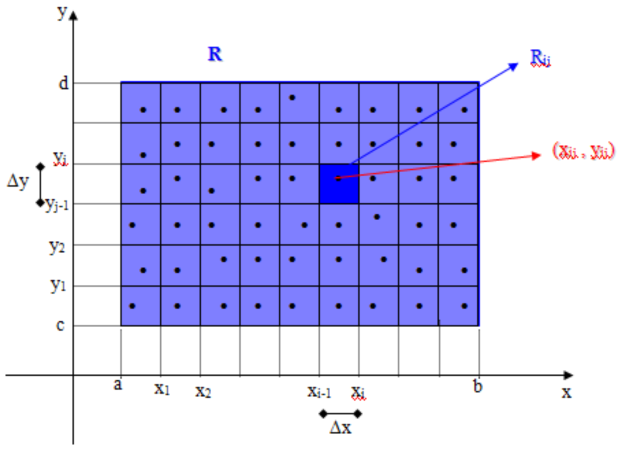
$$R = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\right\}.$$



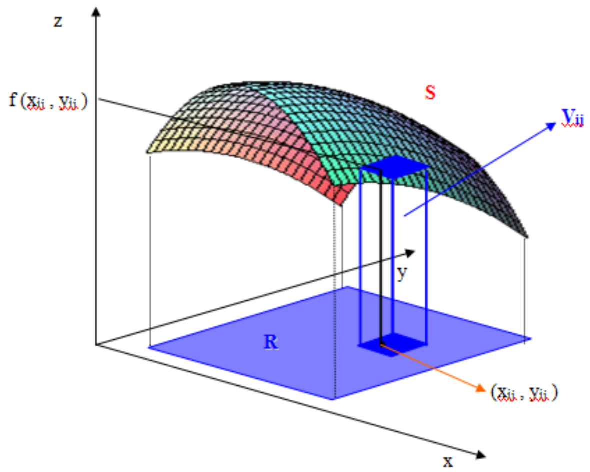
Seja S a superfície do gráfico de f.



Podemos dividir o retângulo R em $n \times m$ sub-retângulos R_{ij}.de igual tamanho: todos eles de comprimento Δx e largura Δy. Para tal, basta dividir o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, \ldots, n$, e o intervalo $[c, d]$ em m sub-intervalos $[y_{j-1}, y_j]$, com $j = 1, 2, \ldots, m$. Temos $x_0 = a$, $x_n = b$ e $\Delta x = (b - a)/n$, bem como, $y_0 = c$, $y_m = d$ e $\Delta y = (d - c)/m$. Seja ainda (x_{ij}, y_{ij}) (ou (x_i, y_j) para simplificar) um ponto arbitrário escolhido no sub-retângulo R_{ij}.



Tomando a imagem por f de cada ponto (x_{ij}, y_{ij}), obtemos um paralelepípedo P_{ij} (ou prisma retângular regular) cuja base é o sub-retângulo R_{ij} e cuja altura é $f(x_{ij}, y_{ij})$. Se f for **não-negativa** em todo o sub-retângulo R_{ij}, o volume V_{ij} desse paralelepípedo é $V_{ij} = A(R_{ij}) \cdot f(x_{ij}, y_{ij})$.



Sendo $f(x_{ij}, y_{ij})$ a imagem de cada ponto (x_{ij}, y_{ij}) por f, o volume V_{ij} de cada paralelepípedo P_{ij} é uma aproximação do volume do sólido delimitado pelo gráfico de f para $(x, y) \in R_{ij}$ e pelo plano xOy (ajuda pensar na função f como contínua no sub-retângulo R_{ij}). A soma V dos volumes V_{ij},

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[A(R_{ij}) \cdot f(x_{ij}, y_{ij}) \right], \tag{1}$$

é então uma estimativa do volume do sólido delimitado pela superfície do gráfico de f e pelo plano xOy para $(x, y) \in R$. A dupla soma em (1) significa que, fixando um valor de i, somamos os volumes de todos os paralepípedos P_{ij} com $j = 1, 2, \ldots, m$ (a fila de paralelepípedos associado a $[x_{i-1}, x_i]$) obtendo $\sum_{j=1}^{m} \left[A(R_{ij}) \cdot f(x_{ij}, y_{ij}) \right]$, e depois somamos de novo considerando todos os valores de i, ou seja, $i = 1, 2, \ldots, n$ (consideramos todas as filas), obtendo V.

Pensando assim em todo o retângulo R, e não apenas em cada sub-retângulo que o constitui, acima do plano xOy existem $n \times m$ paralelepípedos cujas alturas "seguem de perto" a superfície S do gráfico de f. Intuitivamente, verificamos que estimativa fornecida por (1) melhora quando o número de sub-retângulos aumenta, ou seja, quando aumentamos os valores de n e de m, pois isso conduz a considerar um um maior número de paralelepípedos (por ser maior o número de pontos (x_{ij}, y_{ij}) considerados) cujas alturas "seguem mais de perto" a superfície S do gráfico de f. Esperamos então que o limite

$$\lim_{n,m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[A(R_{ij}) \cdot f(x_{ij}, y_{ij}) \right]$$

corresponda ao volume do sólido delimitado pelo gráfico de f e pelo plano xOy. Dado que

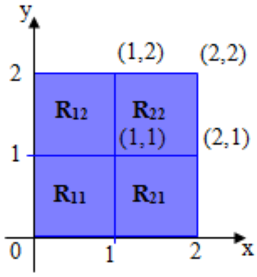
$$A(R_{ij}) = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m}$$

este limite ainda pode ser escrito como

$$\lim_{n,m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\Delta x \cdot \Delta y \cdot f(x_{ij}, y_{ij}) \right] = \lim_{n,m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m} \cdot f(x_{ij}, y_{ij}) \right].$$

Ao tomar o limite das somas quando $n \to \infty$ e $m \to \infty$, a área $\Delta x \times \Delta y$ dos sub-retângulos torna-se um infinitésimo.

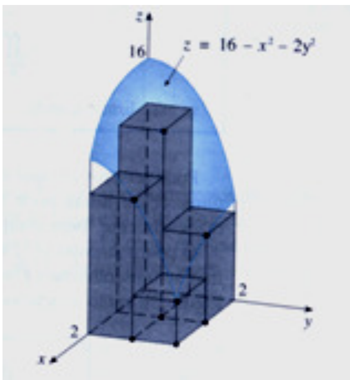
Exemplo 1 *Consideremos a função* $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ *e o retângulo (neste caso, regular: um quadrado)*$R = [0,2] \times [0,2]$. *O gráfico de* f *é parte de um parabolóide elíptico de vértice* $(0,0,16)$. *Dividindo o retângulo* R *em 4 sub-retângulos de lado 1, obtemos a seguinte partição*[1]*:*



Uma escolha de pontos (x_{ij}, y_{ij}), *com* $i = 1,2$ *e* $j = 1,2$, *pode ser a do canto superior direito de cada sub-retângulo, ou seja,* $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$ *e* $(2,2)$. *A soma*

$$\begin{aligned} V &= 1 \cdot f(1,1) + 1 \cdot f(2,1) + 1 \cdot f(1,2) + 1 \cdot f(2,2) \\ &= 13 + 10 + 7 + 4 = 34 \end{aligned}$$

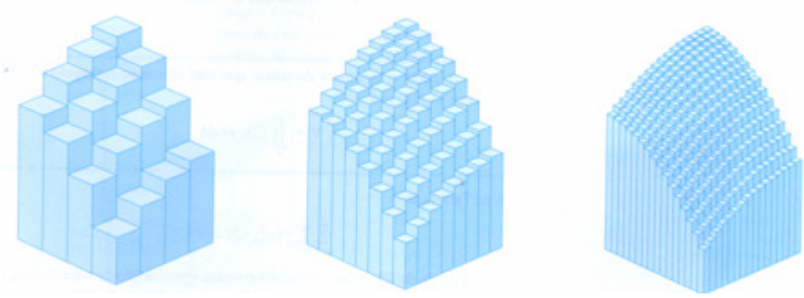
é uma estimativa "grosseira" do volume abaixo do gráfico de f *até ao plano* xOy *para* $(x,y) \in R$.



No entanto, podemos melhorar a aproximação aumentando o número de sub-retângulos. Através das figuras seguintes, onde foram considerados 16, 64 e

[1] O termo *partição* não é introduzido neste texto, mas na subdivisão do retângulo R tal como exposto, pode ser utilizado.

256 sub-retângulos, verificamos que o cálculo do volume é melhorado quando o "agrupamento" de paralelepípedos se aproxima da "forma da superfície".



Definição 2 *O **integral duplo** de f em R, que se denota por $\iint_R f(x,y)\,dA$ ou $\iint_R f(x,y)\,dxdy$, é o limite da soma de Riemann*

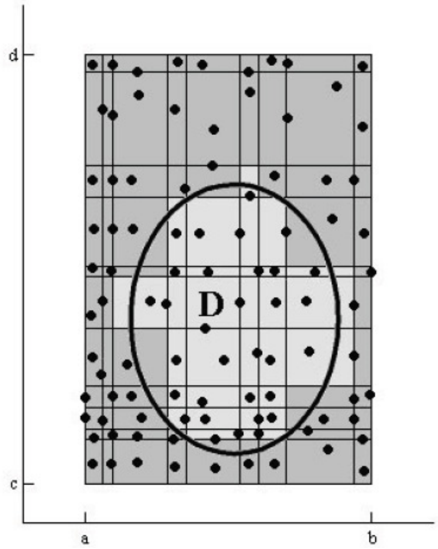
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \lim_{n,m\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [f(x_{ij},y_{ij})\cdot \Delta x\cdot \Delta y]}_{soma\ de\ Riemann}.$$

*Este limite existe sempre que f for uma função contínua. R é designado por **domínio de integração** e f por **função integranda**.*

A definição de integral duplo através das somas de Riemann pode ser generalizada a funções f definidas num qualquer domínio D_f que não seja um retângulo R. A construção anterior pode ser feita para qualquer conjunto $D \subseteq D_f$ considerando uma extensão F de f definida num retângulo R que contenha o domínio de integração D pela expressão

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y)\in D \\ 0 & \text{se } (x,y)\notin D. \end{cases}$$

para todo $(x,y)\in R$. Note que, neste caso, apenas os sub-retângulos R_{ij} onde é escolhido um ponto $(x_{ij},y_{ij})\in D$ contribuem para a soma de Riemann e, consequentemente para o valor do integral duplo. Os restantes pontos têm contribuição nula pois a sua imagem é 0.



Alguma "falta de rigor" na escolha arbitrária dos pontos em sub-retângulos "de fronteira" é corrigida pela consideração de um número cada vez maior de sub-retângulos. Assim, define-se

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Também a definição de integral duplo através das somas de Riemann pode ser generalizada a funções f que sejam negativas em *(i)* todo o domínio de integração D ou *(ii)* em parte dele. No primeiro caso *(i)*, o valor do integral duplo é o **valor simétrico do volume** delimitado pela superfície do gráfico com $(x,y) \in D$ e pelo plano xOy. No segundo caso *(ii)*, o valor do integral duplo **não pode ser interpretado como um volume**. O conhecimento da superfície do gráfico de f facilita o cálculo de integrais duplos e é de **grande importância** para evitar simplificações "tendenciosas" induzidas por simetrias no domínio de integração D.

O cálculo de integrais duplos pela definição é usualmente muito trabalhoso e na maioria dos casos muito difícil. Na prática, os integrais duplos são então calculados segundo um processo iterativo conforme se expõe de seguida.

No caso mais simples em que o domínio de integração é um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, o valor do integral duplo

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

é dado, com igual valor, por qualquer uma das seguintes sequências de integração:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \quad \text{ou} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Temos assim,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \underbrace{\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx}_{\text{ordem de integração dydx}} = \underbrace{\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy}_{\text{ordem de integração dxdy}},$$

A possibilidade de calcular o valor do integral por qualquer uma das ordens é garantida pelo Teorema de Fubini para domínios de integração regulares (noção de regularidade explicada mais à frente) e sempre que a função integranda f seja **limitada** no domínio de integração D. Note que são válidas as igualdades

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x \times \Delta y = \underbrace{\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x \right) \Delta y}_{\text{ordem de integração dxdy}},$$

e

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x \times \Delta y = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta y \right) \Delta x}_{\text{ordem de integração dydx}}$$

que equivalem a escrever o integral duplo como sequência de dois integrais simples (cada um numa só variável).

Embora com menor rigor, também se pode escrever

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \underbrace{\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy}_{\text{ordem de integração dydx}} = \underbrace{\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx}_{\text{ordem de integração dxdy}},$$

ou ainda,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \underbrace{\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx}_{\text{ordem de integração dydx}} = \underbrace{\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy}_{\text{ordem de integração dxdy}}.$$

Esta última notação presta-se a enganos em domínios de integração D que não sejam retângulos, pelo que é de evitar. Note que a indicação

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy$$

em vez de $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$ **não indica**, por si só, qualquer ordem de integração (não constam os extremos de integração).

O cálculo de integrais duplos reduz-se assim ao cálculo de integrais simples. No cálculo de cada integral simples apenas uma das variáveis, x ou y, é considerada como tal. Em consequência, o cálculo de primitivas envolvido carece de atender a qual das variáveis se refere (tipo "primitivação parcial").

Exemplo 3 *O cálculo do integral duplo*

$$\iint_R xy + \sin(x)\ \ dA$$

da função $f(x,y) = xy + \sin(x)$ *no retângulo* $R = [0,\pi] \times [1,2]$ *pode ser feito por qualquer uma das ordens de integração:*

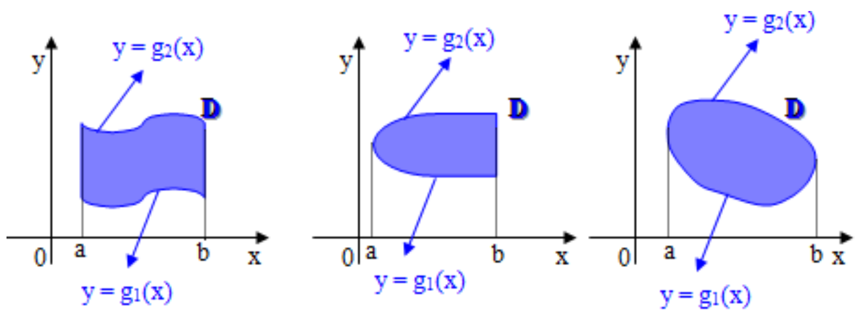
$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_0^\pi \left(\int_1^2 xy + \sin(x)\ \ dy \right) dx}_{\textit{ordem de integração dydx}} &= \int_0^\pi \left[x\frac{y^2}{2} + \sin(x)\,y \right]_1^2 dx \\
&= \int_0^\pi x\frac{4}{2} + (\sin x)\,2 - \left(x\frac{1}{2} + \sin x \right) dx \\
&= \int_0^\pi 2x + 2\sin(x) - \frac{1}{2}x - \sin(x)\,dx \\
&= \int_0^\pi 2x + \sin(x) - \frac{1}{2}x\ dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[x^2 - \cos(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= \pi^2 - \cos\pi - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2} - (0 - \cos 0 - 0) \\
&= \pi^2 + 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2} - (-1) \\
&= \frac{3}{4}\pi^2 + 2
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_1^2 \left(\int_0^{\pi} xy + \sin(x)\ dx\right) dy}_{ordem\ de\ integração\ dxdy} &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2}y - \cos(x)\right]_0^{\pi} dy \\
&= \int_1^2 \frac{\pi^2}{2}y - \cos(\pi) - (0 - \cos 0)\ dy \\
&= \int_1^2 \frac{\pi^2}{2}y + 2\ dy \\
&= \left[\frac{\pi^2}{2}\frac{y^2}{2} + 2y\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi^2}{2}\frac{4}{2} + 4 - \left(\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{2} + 2\right) \\
&= \frac{3}{4}\pi^2 + 2.
\end{aligned}$$

Consideremos agora o caso de domínios de integração D como mostra a figura abaixo.



Cada um destes domínios pode ser definido por

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ g_1 (x) \leq y \leq g_2 (x) \right\}$$

através de funções g_1 e g_2 contínuas em $[a, b]$. Sem necessitar de considerar um retângulo R que contenha este domínio de integração (conforme já referido), podemos calcular o valor do integral duplo $\iint_R f (x, y) \, dA$ pela expressão

$$\iint_R f (x, y) \, dA = \underbrace{\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f (x, y) \, dy \right) dx}_{\text{ordem de integração dydx}}.$$

O domínio de integração D é regular segundo o eixo do y – razão pela qual é privilegiada a ordem de integração $dydx$ – pois:

(a) qualquer reta vertical que passe por um ponto interior a D interseta a fronteira de D apenas em 2 pontos, e

(b) D é limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas $y = g_1 (x)$ e $y = g_2 (x)$ com $a \leq b$ e $g_1 (x) \leq g_2 (x)$.

Se pretender aprofundar o aparecimento dos integrais simples atenda à nota abaixo[2].

Embora se possam omitir os parentesis

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dydx$$

[2] Considere que a fronteira da região D não intersecta nenhuma reta paralela ao eixo dos yy em mais do que 2 pontos. Desenhe as rectas tangentes à fronteira da região D que sejam paralelas aos eixos coordenados: sejam $x = a$ e $x = b$ com pontos de tangência X e $X\prime$, e sejam $y = c$ e $y = d$ com pontos de tangência Y e $Y\prime$. Sejam $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ as equações dos arcos XYX' e $XY'X'$, respetivamente. Divida o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de amplitude Δx. Da mesma forma, divida o intervalo $[c, d]$ em m sub-intervalos de amplitude Δy. Assim, a região D fica subdividida num certo número de retângulos R_{ij} com áreas $\Delta x \times \Delta y$ e num certo número de outras subregiões que se podem ignorar. Escolha em cada retângulo R_{ij} um ponto (x_{ij}, y_{ij}) e calcule a sua imagem pela função f. Escolha um dos subintervalos do intervalo $[a, b]$, isto é, fixe um dos i's, para construir a soma

$$\left(\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta y \right) \Delta x$$

que envolve todos os retângulos correspondentes ao subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, isto é, todos os retângulos da i-ésima coluna. Considere o limite da soma anterior quando $m \to \infty$, ou deve ficar claro que o cálculo do integral duplo requer o cálculo de dois integrais simples pela ordem indicada: primeiro o integral de $f(x,y)$ em relação à variável y (considerando x como constante) desde $y = g_1(x)$ (a fonteira inferior do domínio de integração D) até $y = g_2(x)$ (a fronteira superior de D); depois o integral da expressão obtida na variável x no intervalo $[a,b]$,isto é, do extremo esquerdo do domínio de integração D até ao extremo direito de D.

Consideremos agora o caso de domínios de integração D como mostra a

---

seja, quando $\Delta y \to 0$,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij},y_{ij})\Delta y\Delta x = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij},y_{ij})\Delta y\right)\Delta x$$

que é igual, segundo a definição de integral a uma só variável (a variável y), a

$$\left(\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x,y)dy\right)\Delta x$$

e designe-o por $\varphi_i(x)\Delta x$.

Considere agora a soma das n colunas e o limite quando $n\to\infty$, ou seja, $\Delta x \to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\Delta x = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

equivalente, de novo pela definição de integral a uma única variável (a variável x), a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\Delta x = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

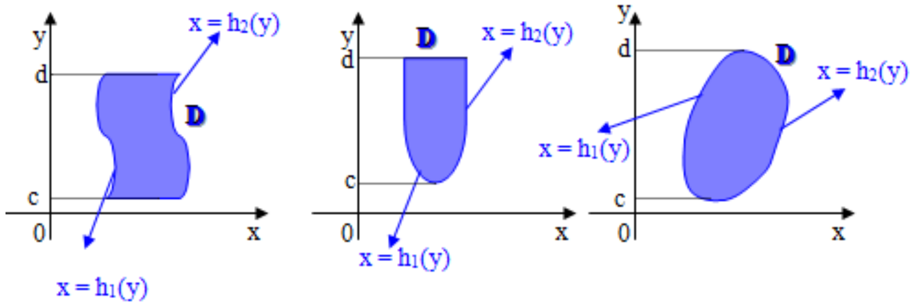
ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta y\right)\Delta x = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

donde se conclui que

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

figura abaixo.



Cada um destes domínios pode ser definido por

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) \leq x \leq h_2(x) \ \ \wedge \ \ c \leq y \leq d\right\}$$

através de funções h_1 e h_2 contínuas em $[c, d]$. Sem necessitar de considerar um retângulo R que contenha este domínio de integração, podemos calcular o valor do integral duplo $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA$ pela expressão[3]

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \underbrace{\int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dx\right) dy.}_{\text{ordem de integração dxdy}}$$

O domínio de integração D é regular segundo o eixo do x – razão pela qual é privilegiada a ordem de integração $dxdy$ – pois:

(a) qualquer reta horizontal que passe por um ponto interior a D interseta a fronteira de D apenas em 2 pontos, e

(b) D é limitado pelas retas $y = c$ e $y = d$ e pelas curvas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$ com $c \leq d$ e $h_1(y) \leq h_2(y)$.

---

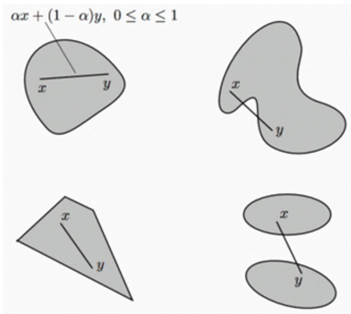
[3]Obviamente que a ordem pela qual se efectuam as somas referidas acima pode ser alterada, isto é, podemos somar o relativo aos retângulos da j-ésima linha e só depois considerar a soma das m linhas. O resultado obtido é outro integral iterado

$$\int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dx\right) dy$$

onde $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$ são as equações dos arcos YXY' e $YX'Y'$, respetivamente (ver nota anterior).

Pelo exposto, verificamos que o cálculo de integrais duplos envolve a escolha de uma ordem de integração e o cálculo sucessivo de dois integrais numa só variável. Para tal, dado um domínio de integração D, é necessário determinar os limites de integração em cada um dos integrais simples envolvidos.

Pode ocorrer maior dificuldade se o domínio D não for um conjunto conexo. Um conjunto D diz-se convexo quando $\alpha x + (1 - \alpha)\, y \in D$ sempre que $x, y \in D$ e para todo o $\alpha \in [0, 1]$, ou seja, sempre que 2 pontos pertencem a D também o segmento de reta que os une está (inteiramente) contido em D. Nas figura seguinte, apenas os conjuntos da esquerda são convexos[4].



Quando o domínio de integração D não é convexo (ver Exemplo 8) é necessário subdividi-lo num número finito de subconjuntos convexos D_i, onde uma das ordens $dxdy$ ou $dydx$ possa ser usada e aplicar a seguinte propriedade dos integrais duplos:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$

onde $D = D_1 \cup D_2$ e D_1 e D_2 não se sobrepôem excepto nas respetivas fronteiras. Note que esta propriedade pode ser aplicada mesmo que o conjunto D seja convexo (ver Exemplo 5).

Por vezes é forçoso inverter a ordem de integração por ser dificil primitivar a $f(x, y)$ em ordem a uma das variáveis. Considere a esse respeito o Exemplo 6.

[4] A noção de convexidade de conjuntos é mais abrangente:

Caso existam os integrais duplos envolvidos, são ainda válidas as seguintes propriedades operacionais:

$$\boxed{\iint_D f(x,y) \pm g(x,y)\, dA = \iint_D f(x,y)\, dA \pm \iint_D g(x,y)\, dA}$$

$$\boxed{\iint_D k \cdot f(x,y)\, dA = k \cdot \iint_D f(x,y)\, dA}, \quad \text{para } k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\iint_D h(x) \cdot f(x,y) dA = \int_a^b h(x) \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right) dx};$$

$$\boxed{\iint_D g(y) \cdot f(x,y) dA = \int_c^d g(y) \cdot \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx \right) dy}.$$

Seguem-se alguns exemplos de cálculo de integrais duplos.

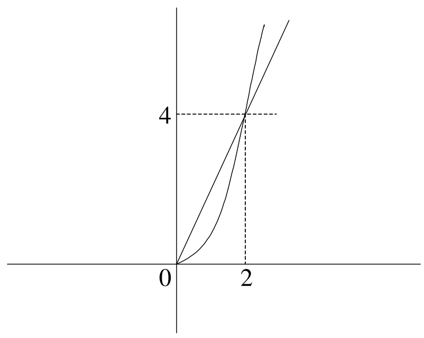
Exemplo 4 *Dada a função* $f(x,y) = x + y$,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x+y) dy \right) dx &= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\, dx \\ &= \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^2 = \frac{52}{15}\end{aligned}$$

corresponde ao cálculo do integral duplo de f *no domínio de integração* D

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ \wedge \ x^2 \le y \le 2x \right\}$$

na ordem de integração $dydx$.



Temos, segundo a notação usada no texto, $a = 0$, $b = 2$, $g_1(x) = x^2$ *e* $g_2(x) = 2x$.

O mesmo integral duplo pode ser calculado pela ordem de integração dxdy como

$$\int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x+y)dx \right) dy.$$

Temos então

$$c = 0, \quad d = 4, \quad h_1(y) = \frac{y}{2} \quad e \quad h_2(y) = \sqrt{y},$$

segundo a notação indicada no texto.

Exemplo 5 *Consideremos agora o integral duplo*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x} (x+y)dy \right) dx &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^1 4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\, dx \\ &= \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{59}{60} \end{aligned}$$

da função $f(x,y) = x + y$ *no domínio de integração*

$$D' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x^2 \leq y \leq 2x \right\}$$

na ordem de integração dydx.

Se optarmos pela ordem de integração dxdy, o mesmo integral duplo terá de ser calculado como segue:

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x+y)dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x+y)dx \right) dy$$

dado que é necessário considerar 2 sub-domínios D'_1 *e* D'_2 *separados pela reta* $y = 1$ *tais que* $D'_1 \cup D'_2 = D$. *De facto, atendendo a que a reta vertical* $x = 1$ *interseta a parábola* $y = x^2$ *quando* y *toma o valor* 1 *e interseta a recta*

$y = 2x$ quando y toma o valor 2 (atenda à figura anterior e complete-a) estes 2 sub-domínios serão os seguintes

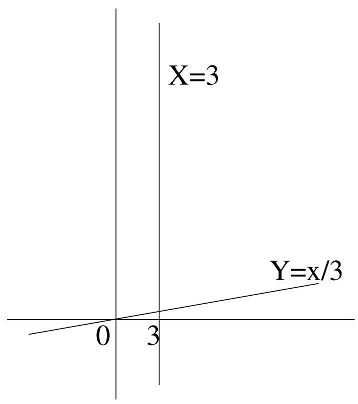
$$D_1' \equiv \begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \quad e \; D_2' \equiv \begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}.$$

Exemplo 6 *Considere o integral duplo*

$$\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 \exp(x^2) dx \right) dy.$$

Este integral duplo não pode ser calculado de forma fácil diretamente pela ordem de integração estabelecida (dxdy) visto que a primitiva $\int \exp(x^2)dx$ não é de uma primitiva elementar.

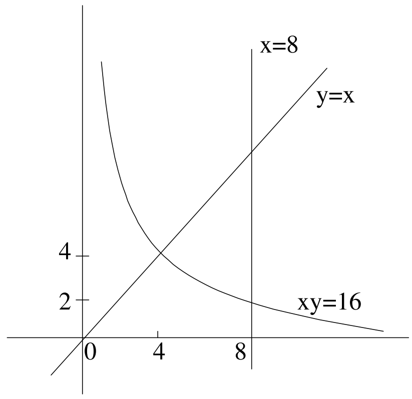
*O domínio de integração D deste integral duplo é limitado pelas retas $x = 3y$, $x = 3$ e $y = 0$. Para estabelecer o outra ordem de integração – isto é, para **efectuar inversão da ordem de integração do integral duplo** – é útil representar graficamente este domínio de integração D.*



A partir dessa representação, é então possível escrever corretamente a nova ordem de integração

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{3y}^3 \exp(x^2) dx \right) dy &= \int_0^3 \left(\int_0^{x/3} \exp(x^2) dy \right) dx = \int_0^3 \left[\exp(x^2) y \right]_0^{x/3} dx \\ &= \int_0^3 \exp(x^2) \frac{x}{3} \, dx = \frac{1}{6} \left[\exp(x^2) \right]_0^3 = \frac{1}{6} \left(\exp 9 - 1 \right). \end{aligned}$$

Exemplo 7 *Pretendemos calcular o integral duplo* $\iint_D f(x,y)dA$ *da função* $f(x,y) = x^2$ *no domínio de integração*D *definido pelas curvas* $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$ *e* $x = 8$. *Há que representar graficamente* D,



para estabelecer as 2 ordens de integração, que são

$$\int_0^2 \left(\int_y^8 x^2 dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_y^{16/y} x^2 dx \right) dy$$

e

$$\int_0^4 \left(\int_0^x x^2 dy \right) dx + \int_4^8 \left(\int_0^{16/x} x^2 dy \right) dx$$

Verificamos através da figura que, qualquer que seja a ordem de integração escolhida, é necessário separar o domínio de integração em 2 sub-domínios:

- D_1 *e* D_2 *separados pela reta* $y = 2$ *quando a opção é*

$$\int \left(\int f(x,y)dx \right) dy,$$

- D_1' *e* D_2' *separados pela reta* $x = 4$ *quando a opção é* $\int \left(\int f(x,y)dy \right) dx$.

O cálculo por qualquer uma das ordens de integração conduz ao valor 448 *para o integral duplo (proceda aos cálculos).*

Example 8 *Pretendemos estabelecer as 2 ordens de integração para o integral duplo* $\iint_D f(x,y)dA$ *sendo* D *definido pelas curvas por* $y = \sin x$ *e* $y = \cos x$ *para* $0 \leq x \leq \pi$ *(sem explicitar qual a função* f*).*

A representação gráfica de D ilustra que é um domínio regular segundo o eixo do y, mas não segundo o eixo do x. De facto, nenhuma reta vertical intersecta a fronteira do domínio em mais do que 2 pontos enquanto existem retas horizontais que intersetam a fronteira do domínio em mais do que 2 pontos (neste caso em 3 ou em 4 pontos). Assim, estabelecer a ordem de integração $dydx$ é elementar,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} f(x,y)dy \right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)dy \right) dx,$$

enquanto que estabelecer a ordem de integração $dxdy$ requer o uso da propriedade apresentada acima

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} f(x,y)dxdy &= \int_0^{(\sqrt{2})/2} \left(\int_0^{\arcsin y} f(x,y)dx \right) dy \\ &+ \int_{(\sqrt{2})/2}^{1} \left(\int_0^{\arccos y} f(x,y)dx \right) dy \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{\arccos y}^{\pi} f(x,y)dx \right) dy \\ &+ \int_0^{(\sqrt{2})/2} \left(\int_{\arccos y}^{\arcsin y} f(x,y)dx \right) dy \\ &+ \int_{(\sqrt{2})/2}^{1} \left(\int_{\arcsin y}^{\arcsin y} f(x,y)dx \right) dy \end{aligned}$$

1.1 Exercícios propostos

1. Determine as expressões gerais das primitivas $\int f(x,y)dx$ e $\int f(x,y)dy$ para as funções seguintes:

   (a) $f(x,y) = x^3 + 6y^2 - 5xy^2 - 10x^2y^3 + \dfrac{1}{x} + xy^2 + 6$

   (b) $f(x,y) = (x^2+y)^4\, x$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y^2}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{(5x^3+2y)^4}$

   (e) $f(x,y) = \dfrac{10y}{x^2-9}$

   (f) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

   (g) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}$

   (h) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(x+y)^2}}$

   (i) $f(x,y) = \dfrac{10}{3x+y^2}$

   (j) $f(x,y) = \dfrac{8}{4x+y^2}$

   (k) $f(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y)^4}$

   (l) $f(x,y) = \dfrac{10}{x^2-y^2}$

2. Mostre que

$$\int_0^3 \left(\int_1^4 xy^2 \, dy \right) dx = \frac{189}{2} \quad \text{e} \quad \int_{-3}^3 \left(\int_1^4 xy^2 \, dy \right) dx = 0.$$

3. Mostre que

$$\int_1^2 \left(\int_x^{2x^2} x^3 + 2y \, dy \right) dx = \frac{559}{15}.$$

4. Calcule o valor do integral duplo

$$\iint_D x^3 + 2y \, dA$$

por cada uma das ordens de integração, sendo D a região do plano limitada pelas curvas $x = 1$, $x = 2$, $y = 2x^2$ e $y - x = 0$.

5. Considere a função $f(x, y) = xy^2$.

(a) Mostre que

$$\iint_D f(x, y) \, dA = -\frac{1}{15}$$

sendo e

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \leq 0 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}.$$

(b) Averígue ainda se pode retirar algumas conclusões acerca do valor do integral duplo da mesma função $f(x, y) = xy^2$ para os domínios de integração:

$$D_1 \equiv \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}, \qquad D_2 \equiv \begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases},$$

$$D_3 \equiv \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}, \qquad D_4 \equiv \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases},$$

$$D_5 \equiv \begin{cases} x \geqslant y \\ y \geq -x \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad D_6 \equiv \begin{cases} x \geqslant y \\ x \leq -y \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}.$$

(c) Indique, justificando, em que domínios (de D_1 a D_6) o cálculo do integral duplo corresponde ao cálculo de um volume.

6. Seja D o círculo de equação $x^2 + y^2 \leqslant 1$ situado no 1^o quadrante.

(a) Mostre que

$$\iint_D x \, dA = \frac{1}{3} = \iint_D y \, dA,$$

(b) Mostre que é F a afirmação

$$\text{Se } D' \equiv \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{então} \iint_D x \, dA = \frac{2}{3}.$$

(c) Mostre que é V a afirmação

$$\text{Se } D' \equiv \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{então} \iint_{D'} y \, dA = \frac{2}{3}.$$

7. Mostre que $\frac{4}{5}$ é o valor do volume limitado pelo plano xOy e pela superfície de equação $z = xy^2$ na restrição de f ao triângulo de vértices $A(0,0), B(0,2)$ e $C(1,2)$.

8. Encontra o volume do sólido limitado superiormente pela superfície de equação $z = x + y$ e limitado inferiormente pelo triângulo de vértices $(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0)$.

9. Determine o valor do volume limitado pelo plano xOy e pela superfície de equação $z = \exp(-y^2)$ dado pelo integral duplo

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \exp(-y^2) \, dy \right) dx.$$

10. Considere o integral duplo
$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)\ dy \right) dx.$$
Estabeleça a outra ordem de integração e calcule o valor do integral para $f(x,y) = \sqrt{2}x$.

11. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \leq y \leq 4x\}$. Mostre que
$$\iint\limits_D x + y\ dA = \frac{448}{5}.$$

12. Sabendo que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 \leq x\ \wedge\ y \geq 0\ \wedge\ x + y \leq 2\}$, mostre que
$$\iint\limits_D 2x - y\ dA = \frac{103}{60}.$$

13. Sendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0\ \wedge\ x \leq 2y \leq 6\}$, mostre que
$$\iint\limits_D \exp(y^2)\ dA = \exp(9) - 1.$$

14. Considere o integral duplo
$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}-1}^{-\ln y} f(x,y)\ dx.$$
Inverta a ordem de integração e mostre que o valor do integral duplo é $10/63$ quando $f(x,y) = y^2$.

15. Considere o integral duplo
$$\int_0^{1/4} dy \int_{1/2-\sqrt{(1-4y)/4}}^{1/2+\sqrt{(1-4y)/4}} f(x,y)\ dx.$$
    (a) Mostre que o domínio de integração é
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x - x^2\right\}.$$

(b) Tomando $f(x,y)=\exp\left(\frac{y}{x}+x\right)$, calcule o valor do integral duplo

$$\iint\limits_D \exp\left(\frac{y}{x}+x\right)\ dA.$$

16. Prove a igualdade

$$\int_1^{\infty}\left(\int_0^{1/x^4} x\exp(x^2\sqrt{y})\ dy\right)dx=1.$$

17. Mostre, usando cada uma das possíveis ordens de integração, que

$$\iint\limits_D xy^2\ dA=\frac{2}{5},$$

em que $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq x\ \wedge\ xy\leq 1\right\}.$

18. Mostre a igualdade

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy\int_{\arccos(y)/2}^{\pi/4} \exp\left[\cos\left(2x\right)\right]\ dx=\frac{e-1}{2}.$$

ordem de integraão

19. Escreva a soma

$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ +\ \int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)\ dx$$

através de um único integral duplo.

20. Seja $f(x,y)$ uma função real contínua e limitada no domínio de integração $D=D_1\cup D_2$ relativo à seguinte soma de integrais

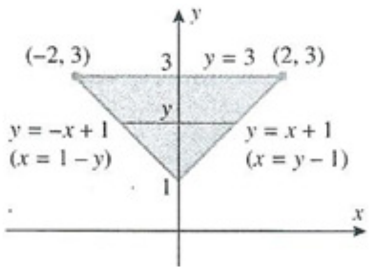
$$\int_{1-\sqrt{2}}^0 dx\int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} f\left(x,y\right)\ dy+\int_0^2 dx\int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} f\left(x,y\right)\ dy.$$

Jsutifique que esta soma de integrais duplos tem o mesmo valor que

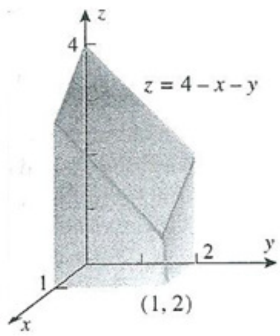
$$\int_0^2 dy\int_{1-\sqrt{2-(y-1)^2}}^{y} f\left(x,y\right)\ dx+\int_2^{1+\sqrt{2}} dy\int_{1-\sqrt{2-(y-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(y-1)^2}} f\left(x,y\right)\ dx.$$

21. Considere o retângulo $R = [0,1] \times [0,1]$ e a função
$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$
    (a) Mostre que $\iint_R f(x,y)\, dA$ não tem o mesmo valor por cada uma das ordens de integração.
    (b) Os resultados obtidos na alínea anterior contrariam o Teorema de Fubini? Justifique.
    (c) O que pode concluir quanto à existência do integral duplo
    $$\iint_R f(x,y)\, dA$$
    e quanto à integrabilidade de f no domínio de integração D ?

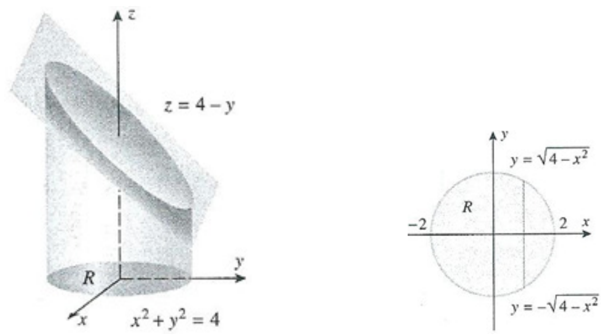
22. Escreva as duas ordens de integração do integral duplo $\iint_D f(x,y)\, dA$ no domínio de integração D a seguir representado.



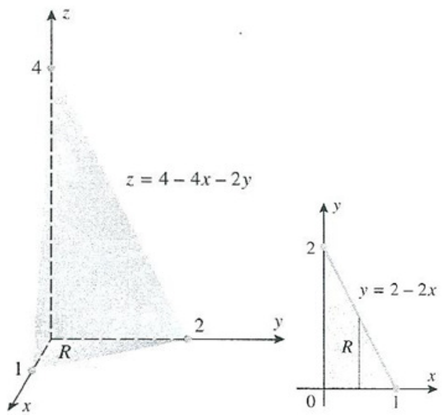
23. Use um integral duplo para calcular o volume da região do espaço representada em cada uma das Figuras 1., 2.a e 3.a.
    (a) Figura 1:



(b) Figuras 2a e 2b



(c) Figuras 3a e 3b:



24. Calcule o volume da região do espaço limitada pelas superfícies $z+x^2+y^2=b^2$, $z=0$, $|x|=a$ e $|y|=a$ com $0<a<b$.

25. Calcule o volume da região do espaço situada no 1^o octante limitada pelas superfícies $x=1$, $z=x+y$ e $x=\sqrt{4-y}$.

26. Mostre que
$$\iint_D xy^2\ dA = \frac{1185}{4}$$
sendo D a região do plano limitada pelas retas $x=3$, $x=5$, $2y=1-3x$ e $2y=4-3x$.

27. Utilizando os integrais duplos calcule os volumes dos sólidos limitados pelas seguintes superfícies

(a) $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = x \\ \\ x = 4y - y^2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$

28. Calcule os seguintes integrais duplos (nos casos necessários e/ou possíveis inverta a ordem de integração):

(a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin \frac{y^3+1}{2}\ dy \right) dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2\ dx \right) dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}\ dy \right) dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\ln y} \exp(-x)\ dx \right) dy$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 \exp \frac{y}{x}\ dx \right) dy$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 x^2 \exp(y^4)\ dx \right) dy$

1.2 Soluções

1. (a) $$\int f(x,y)dx = \frac{x^4}{4} + 6xy^2 - 2x^2y^2 - \frac{10x^3y^3}{3} + \ln|x| + 6x + A(y)$$

$$\int f(x,y)dy = x^3y + \frac{(6-4x)\,y^3}{3} - \frac{10x^2y^4}{4} + \frac{y}{x} + 6y + B(x)$$

(b) $$\int f(x,y)dx = \frac{(x^2+y)^5}{10} + A(y)$$

$$\int f(x,y)dy = \frac{(x^2+y)^5\,x}{5} + B(x)$$

(c) $$\int f(x,y)dx = y\ln|x+y^2| + A(y)$$

$$\int f(x,y)dy = \frac{1}{2}\ln|x+y^2| + B(x)$$

(d) $$\int f(x,y)dx = \frac{1}{5\,(5x^3+2y)^3} + A(y)$$

$$\int f(x,y)dy = \frac{3x^2}{2\,(5x^3+2y)^3} + B(x)$$

(e) $$\int f(x,y)dx = \frac{5y}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + A(y) \text{ (decomp. em frações simples)}$$

$$\int f(x,y)dy = \frac{5y^2}{x^2-9} + B(x)$$

(f) $$\int f(x,y)dx = \int x - \frac{xy^2}{x^2+y^2}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\ln|x^2+y^2| + A(y)$$

$$\int f(x,y)dy = \int 1 + \frac{x^3-x^2}{x^2+y^2}dy = y - (x^2-x)\arctan\frac{y}{x} + B(x)$$

(g) $$\int f(x,y)dx = \frac{\sqrt{x^2+y}}{2} + A(y)$$

$$\int f(x,y)dy = x\sqrt{x^2+y} + B(x)$$

(h) $\displaystyle\int f(x,y)dx = \arcsin\frac{x+y}{2} + A(y)$

$\displaystyle\int f(x,y)dy = \arcsin\frac{x+y}{2} + B(x)$

(i) $\displaystyle\int f(x,y)dx = \frac{10}{3}\ln\left|3x+y^2\right| + A(y)$

$\displaystyle\int f(x,y)dy = \frac{10}{\sqrt{3x}}\arctan\frac{y}{\sqrt{3x}} + B(x)$

(j) $\displaystyle\int f(x,y)dx = 2\ln\left|4x+y^2\right| + A(y)$

$\displaystyle\int f(x,y)dy = \frac{4}{\sqrt{x}}\arctan\frac{y}{2\sqrt{x}} + B(x)$

(k) $\displaystyle\int f(x,y)dx = -\frac{1}{6\left(x^2+y\right)^3} + A(y)$

$\displaystyle\int f(x,y)dy = -\frac{x}{3\left(x^2+y\right)^3} + B(x)$

(l) $\displaystyle\int f(x,y)dx = \frac{5}{y}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| + A(y)$ (decomp. em frações simples)

$\displaystyle\int f(x,y)dy = \frac{5}{x}\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right| + B(x)$ (decomp. em frações simples)

4. $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_x^{2x^2} x^3 + 2y\ dy\right) dx = \frac{559}{15}$

7. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2x}^{2} xy^2\ dy\right) dx = \frac{4}{5}$ (ficheiro manuscrito)

$\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{y/2} xy^2\ dx\right) dy = \frac{4}{5}$ (ficheiro manuscrito)

8. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x + y dy\right) dx = \frac{1}{3}$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^y \exp(-y^2)\ dx\right) dy = \frac{1}{2}$

10. $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)dx\right) dy$ (inversão: ficheiro manuscrito); $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

13. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{2y} \exp\left(y^2\right) dx\ dy = \exp(9) - 1$ (ficheiro manuscrito)

14. $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_0^{(x+1)^2} f(x,y)dy\right) dx + \int_0^\infty \left(\int_0^{\exp(-x)} f(x,y)dy\right) dx;\ \frac{10}{63}$ (ficheiro manuscrito)

15. (b). $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x-x^2} \exp\left(\frac{y}{x} + x\right) dy\ dx = \frac{e}{2} - 1$ (ficheiro manuscrito)

16. $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{1/\sqrt[4]{y}} x \exp\left(x^2\sqrt{y}\right)\ dx\ dy = \cdots = 1$ (ficheiro manuscrito)

17. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x xy^2\ dy\right) dx + \int_1^\infty \left(\int_0^{1/x} xy^2\ dy\right) dx = \cdots = \frac{2}{5}$ (ficheiro manuscrito)

$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{1/y} xy^2\ dx\right) dy = \cdots = \frac{2}{5}$ (ficheiro manuscrito)

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \exp\left[\cos(2x)\right] \int_{\cos(2x)}^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\ dy\ dx = \cdots = \frac{e-1}{2}$ (ficheiro manuscrito)

19. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\ dy$ (ficheiro manuscrito)

20. As duas somas de integrais são relativas ao mesmo domínio de integração D, segundo cada uma das ordens integração; Teorema de Fubini garante a igualdade.

21. **(a)** $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ \ dy \right) dx = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ \ dx \right) dy$

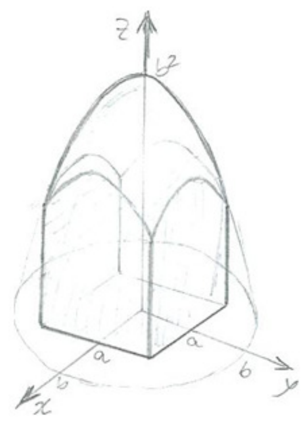
(b) Não contraria o Teorema de Fubini porque a função f não é limitada no domínio de interação: $\lim_{x \to 0, y=2x} f(x,y) = -\infty$.

(c) O integral duplo não existe (embora $\exists$ ambos os integrais iterados) e a função f não é integrável no retângulo R.

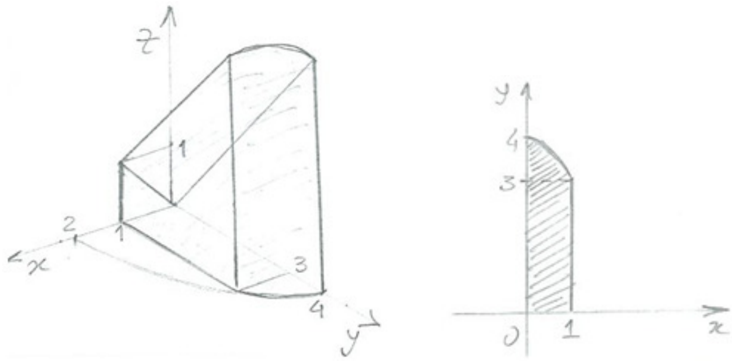
22. ordem $dydx$: $\int_{-2}^0 \left(\int_{1-x}^3 f(x,y)\, dy \right) dx + \int_0^2 \left(\int_{x+1}^3 f(x,y)\, dy \right) dx$

ordem $dxdy$: $\int_1^3 \left(\int_{1-y}^{y-1} f(x,y)\, dx \right) dy$

24. $\int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a (b^2 - x^2 - y^2)\, dy \right) dx = \cdots = 4b^2a^2 - 8\frac{a^4}{3}$; auxiliar à resolução:



25. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{4-x^2} (x+y)\, dy\right) dx = \cdots = \frac{48}{5}$; auxiliar à resolução:



2 Integral duplo: mudança de coordenadas

Em integrais simples (numa só variável), sabemos efetuar mudanças de variável através da igualdade/fórmula

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(g\,(u)) \cdot g'(u)\ du = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f \circ g)\,(u) \cdot g'(u)\ du,$$

onde a variável x dá lugar à (nova) variável u por meio de uma função g injetiva em $[c, d]$, $x = g(u)$, com $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Temos então $c = g^{-1}(a)$ e $d = g^{-1}(b)$. Podemos ainda "aligeirar" a notação para $x = x(u)$ e escrever a fórmula anterior como

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(x\,(u)) \cdot x'(u)\ du$$

onde a integração (na nova variável u) tem lugar no intervalo $[c, d]$.

Também em integrais duplos é possível efetuar mudanças de variáveis. Uma mudança de coordenadas num subconjunto R do plano é dada por uma transformação de classe C^1 de pontos (u, v) em pontos (x, y),

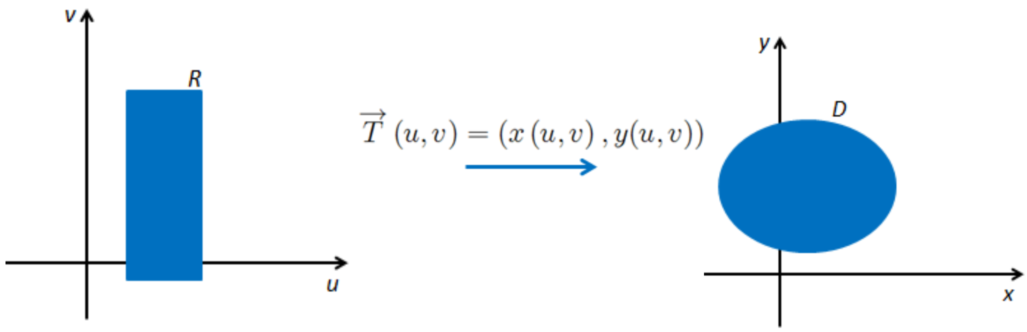
$$\begin{array}{rrl} \overrightarrow{T}: & R \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \\ & (u, v) \longmapsto \overrightarrow{T}\,(u, v) & = (x\,(u, v)\,, y(u, v)) \equiv (x, y) \end{array},$$

tal que o determinante de Jacobi (ou Jacobiano)

$$\det J\left(\overrightarrow{T}\right)(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

não se anule em nenhum ponto da região R. Os pontos $(u,v) \in R$ são assim transformados em pontos (x,y) de um (novo) domínio D no plano xOy, designado por transformado de R por $\overrightarrow{T}$, $D = \overrightarrow{T}(R)$, através das relações

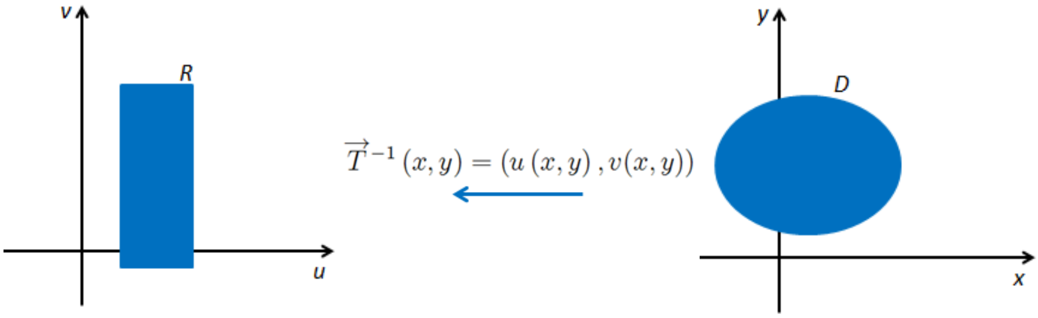
$$\overrightarrow{T} \equiv \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} .$$



Se as derivadas parciais de 1^a ordem das funções componentes $x(u,v)$ e $y(u,v)$ são contínuas em R (pois f é de classe C^1) e $\det J\left(\overrightarrow{T}\right)(u,v) \neq 0$, para todo o $(u,v) \in R$, fica garantido (pelo Teorema da Função Inversa) que $\overrightarrow{T}$ é localmente invertível e que as componentes da função inversa (local), $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$,

$$\overrightarrow{T}^{-1} \equiv \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

têm derivadas parciais de 1^a ordem[5] contínuas na região D.



2.1 Mudança linear de coordenadas

Vejamos o caso mais simples de uma transformação linear de coordenadas no plano, $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida genericamente por

$$\vec{T}(u,y) = (\alpha \cdot u + \beta \cdot v, \gamma \cdot u + \delta \cdot v) \equiv (x,y)\,. \tag{2}$$

A representação matricial de $\vec{T}$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$ é[6]

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Como tal, o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, de área igual a 1, é transformado por $\vec{T}$ no paralelogramo de vértices, respetivamente, $O\,(0,0)$,

---

[5] O Teorema da Função Inversa não é abordado no programa da UC.

Contudo, este teorema garante que o determinante de Jacobi da transformação $\vec{T}^{-1}$ é dado por

$$\det J\left(\vec{T}^{-1}\right)(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \frac{1}{\det J\left(\vec{T}\right)(u,v)}.$$

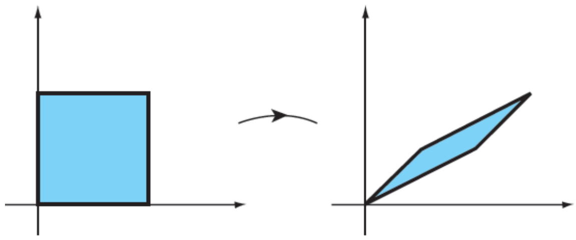
[6] Note que

$$T\left(\vec{e}_1\right) = T\,(1,0) = (\alpha,\gamma) = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2$$

e

$$T\left(\vec{e}_2\right) = T\,(0,1) = (\beta,\delta) = \beta \cdot \vec{e}_1 + \delta \cdot \vec{e}_2.$$

$A(\alpha,\gamma)$, $B(\beta,\delta)$ e $C(\alpha+\beta,\gamma+\delta)$.



A área do paralelogramo $[OABC]$ é igual[7] ao módulo do determinante da matriz T, ou seja,

$$\text{área }[OABC] = \text{mod}\,(\det M) = \text{mod}\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \text{mod}\,(\alpha\delta - \gamma\beta) = |\alpha\delta - \gamma\beta|\,.$$

Vemos assim, que o transformado por $\vec{T}$ de um pequeno retângulo de lados Δu e Δv é um paralelogramo gerado pelos vetores

$$\Delta u \cdot (\alpha,\gamma) \quad \text{e} \quad \Delta v \cdot (\beta,\delta)\,,$$

sendo o elemento área multiplicado por um fator igual ao módulo do determinante da matriz T. Esta conclusão pode ser usada no contexto de mudanças de variáveis em integrais duplos como

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)\cdot|\alpha\delta - \gamma\beta|\,dudv. \tag{3}$$

[7]Para tal, é conveniente relembrar como a área de um paralelogramo no plano pode ser calculada através do determinante de uma dada matriz. Sejam $\overrightarrow{a} = (a_1,a_2)$ e $\overrightarrow{b} = (b_1,b_2)$ vetores no plano. A área do paralelogramo de vértices $O(0,0)$, $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ e $C = A + B = (a_1+b_1, a_2+b_2)$ é igual ao módulo do determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

cujas colunas são os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, ou seja,

$$\text{área }[OABC] = \text{mod}\,(\det M) = \text{mod}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \text{mod}\,(a_1b_2 - a_2b_1)\,.$$

Exemplo 9 *Consideremos o integral duplo*

$$\iint_D xy^2 \; dA = \iint_D xy^2 \; dxdy,$$

da função $f(x,y) = xy^2$*, no domínio de integração*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 5 \ \wedge \ 1 - 3x \leq 2y \leq 4 - 3x \right\},$$

que é um paralelogramo. Segundo o exercício 26 da Subsecção 1.1., o valor deste integral é 1185/4. Nesse cálculo foi escolhida a ordem de integração dydx. Pela ordem inversa dydx, teríamos que considerar o paralelogramo D subdividida em 3 subconjuntos do plano.

Calculemos agora este integral duplo através de uma mudança de coordenadas que transforme este domínio D num retângulo onde, como sabemos, a ordem de integração é pouco relevante (sempre que se verificarem a condições do Teorema de Fubini). A condição $1 - 3x \leq 2y \leq 4 - 3x$ *que carateriza D é equivalente a*

$$1 \leq 2y + 3x \leq 4.$$

Como tal, se tomarmos $u = 2y + 3x$ *e* $v = x$ *obtemos o retângulo*

$$R = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 4 \ \wedge \ 3 \leq v \leq 5 \right\}$$

no plano uOv.

A mudança de coordenadas $u = 2y + 3x$ *e* $v = x$ *é descrita pela transformação linear* $\vec{T}(u,y) = \left(v, \dfrac{u - 3v}{2} \right)$ *que se obtem da resolução do sistema*

$$\begin{cases} u = 2y + 3x \\ v = x \end{cases}$$

em ordem a x e y,

$$\begin{cases} u = 2y + 3x \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2y + 3v \\ x = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u - 3v}{2} \\ x = v \end{cases}. \tag{4}$$

A representação matricial de $\vec{T}$ *é a matriz*

$$T = \left[\ \vec{T}(1,0) \quad \vec{T}(0,1) \ \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

e o módulo do seu determinante é $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$*. Como tal,*

$$\iint_D xy^2\ dA = \iint_D xy^2\ dxdy = \iint_R v\left(\frac{u-3v}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\ dudv.$$

Pela ordem de integração dvdu temos

$$\iint_D xy^2\ dxdy = \iint_R v\left(\frac{u-3v}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\ dudv = \int_1^4 \left(\int_3^5 v\left(\frac{u-3v}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} dv\right) du,$$

e, pela ordem de integração dudv, temos

$$\iint_D xy^2\ dxdy = \iint_R v\left(\frac{u-3v}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\ dudv = \int_3^5 \left(\int_1^4 v\left(\frac{u-3v}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} du\right) dv$$

Prosseguindo com o cálculo pela ordem dudv, temos

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2\ dxdy &= \frac{1}{2}\int_3^5 v\left(\int_1^4 \frac{(u-3v)^2}{4} du\right) dv \\ &= \frac{1}{8}\int_3^5 v\left(\int_1^4 (u-3v)^2\, du\right) dv = \frac{1}{8}\int_3^5 v\left[\frac{(u-3v)^3}{3}\right]_1^4 dv \\ &= \frac{1}{24}\int_3^5 v\left[(4-3v)^3 - (1-3v)^3\right] dv.\end{aligned}$$

Desenvolvendo as potências de 3, calculamos este integral simples e obtemos 1185/4 como valor do integral.

Note que o determinante $-\frac{1}{2}$ *da matriz* T *pode ser obtido como o número inverso do determinante da matriz* T^{-1} *que represente matricialmente a transformação inversa* $\vec{T}^{-1}$*. De facto, temos* $\vec{T}^{-1}(x,y) = (2y+3x, x)$*, logo*

$$T^{-1} = \left[\ \vec{T}^{-1}(1,0)\quad \vec{T}^{-1}(0,1)\ \right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz T^{-1} *tem determinante* -2*, logo a sua matriz inversa* T *tem determinante*

$$\det T = \frac{1}{\det(T^{-1})} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Este último procedimento evita a resolução do sistema (4).

Voltando à transformação de coordenadas em (2),

$$\vec{T}\,(u,y) = \Bigg(\underbrace{\alpha\cdot u+\beta\cdot v}_{x(u,v)}\;,\;\underbrace{\gamma\cdot u+\delta\cdot v}_{y(u,v)}\Bigg),$$

verificamos que as entradas da matriz T são as derivadas parciais de 1^a ordem de $\vec{T}$,

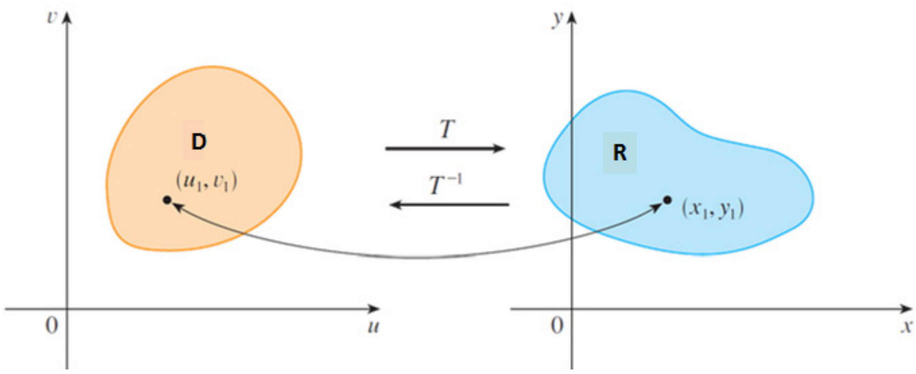
$$J\left(\vec{T}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\,(\alpha\cdot u+\beta\cdot v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\,(\alpha\cdot u+\beta\cdot v)}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial\,(\gamma\cdot u+\delta\cdot v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\,(\gamma\cdot u+\delta\cdot v)}{\partial v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}.$$

Assim, o fator multiplicativo $|\alpha\delta-\gamma\beta|$ sobre o elemento área, presente em (3), não é mais do que o determinante da matriz Jacobiana da transformação $\vec{T}$. Este determinante de Jacobi é usualmente representado por $\dfrac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)}$. A igualdade (2) pode então ser escrita como

$$\iint_D f\,(x,y)\,dxdy=\iint_R f\,(x\,(u,v)\,,y\,(u,v))\cdot\operatorname{mod}\left(\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)}\right)dudv.$$

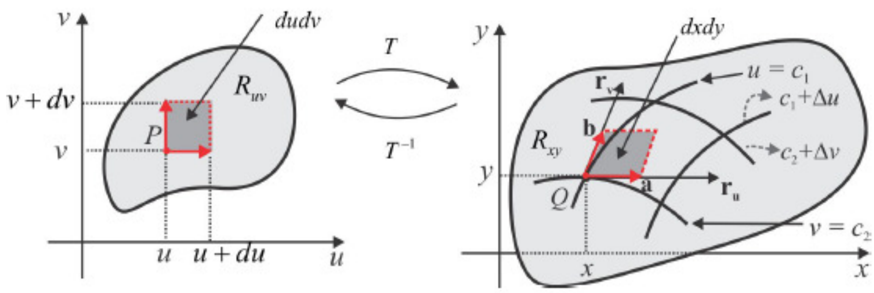
2.2 Mudança de coordenadas: caso geral

A fórmula anterior é válida para qualquer transformação $\overrightarrow{T}$ de coordenadas que seja conveniente em integrais duplos, mesmo que não-linear.



Contudo, é exigido que as funções componentes $x(u,v)$ e $y(u,v)$ devem ter derivadas parciais de 1^a ordem contínuas na região R do plano uOv e que o determinante de Jacobi $\det J\left(\overrightarrow{T}\right)(u,v)$ seja não-nulo em R.

Consideremos a seguinte figura, que particulariza a transformação de um ponto $P(u,v)$ no plano uOv num ponto $Q(x,y)$ do plano xOy.



Tomando curvas de nível $u = c_1$ e $v = c_2$ no ponto Q e atendendo ao significado geométrico das derivadas parciais de 1^a ordem (envolvidas na direção das respetivas retas tangentes), temos

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\cdot\overrightarrow{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\cdot\overrightarrow{e}_2\right)\cdot du$$

e

$$\mathbf{b} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\cdot\overrightarrow{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\cdot\overrightarrow{e}_2\right)\cdot dv.$$

Então os elementos $du\cdot dv$ (do retângulo) e $dx\cdot dy$ (do paralelogramo) relacionam-se pela expressão

$$dx\cdot dy = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \operatorname{mod}\left(\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}\right)du\cdot dv$$

ou seja,

$$dx\cdot dy = \operatorname{mod}\left(\det J\left(\overrightarrow{T}\right)(u,v)\right)dudv = \operatorname{mod}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)du\cdot dv.$$

Atendendo à forma como é definido o integral duplo – através de somas de Riemann onde consideramos sucessivas divisões do domínio de integração em retângulos de área cada vez menor –, obtemos a fórmula de mudança de coordenadas como

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \operatorname{mod}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) dudv} \qquad (5)$$

onde o elemento área $dxdy$ deu lugar a $\operatorname{mod}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) dudv$.

2.3 Mudança para coordenadas polares

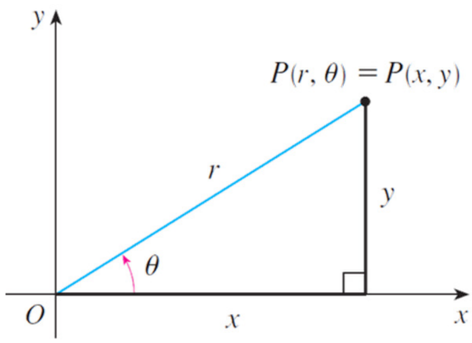
Consideremos o integral duplo

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \iint_D f(x,y)\ dxdy$$

em que o domínio de integração D é uma região circular. Neste caso, pode ser útil o uso de coordenadas polares no cálculo do seu valor, sempre que essa escolha não impeça primitivar a função integranda resultante. Quando o domínio de integração D é uma região circular centrada na origem, o uso de coordenadas polares é ainda, em geral, mais conveniente.

Quando se utilizam *coordenadas retangulares* (x,y) o sistema de referência é dado por um par de retas perpendiculares, os bem conhecidos eixo do x e eixo do y. Para definir *coordenadas polares* é utilizado um sistema de referência que consta de um ponto O, designado por *pólo*, e de um raio que se inicia no ponto O, designado por *eixo polar*.

Concretamente, um ponto P tem coordenadas polares (r,θ) se está posicionado a uma distância r do pólo O e θ é a amplitude (em radianos) do ângulo (medido no sentido positivo) que a semi-reta $\dot{O}P$ determina com o semi-eixo positivo dos xx.



Contrariamente ao que acontece com as coordenadas retangulares, as coordenadas polares não estão univocamente determinadas. De facto, geometricamente não existe distinção entre pontos (r, θ_1) e (r, θ_2) quando a diferença $\theta_1 - \theta_2$ é um múltiplo de 2π, isto é, quando

$$(r, \theta_2) = (r, \theta_1 + 2n\pi)\,, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}.$$

É, no entanto, usual considerar θ como a amplitude do menor dos ângulos. Temos então[8],[9]

$$r \in \mathbb{R}_0^+ \quad e \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Da figura acima, deduzimos facilmente a relação entre as coordenadas polares (r, θ) e as coordenadas retangulares (x, y). Dado que

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{y}{r},$$

obtemos

$$\boxed{\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}}.$$

Esta relação implica que

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

[8]Embora de possa considerar, por conveniência, $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

[9]Note que, com a amplitude $\theta = 2\pi$ obtemos o mesmo ponto que com $\theta = 0$, para o mesmo raio polar r. Como tal, considerar $\theta \in [0, 2\pi[$ é, em geral, suficiente. Contudo, para boa definição dos integrais duplos, consideramos neste contexto, $\theta \in [0, 2\pi]$.

e

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \sin^2\theta = r^2 \cdot \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2 \cdot 1 = r^2.$$

Temos então (note que $r \geq 0$) a relação inversa

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}.$$

O uso de coordenadas polares (r, θ), em alternativa às coordenadas retangulares (x, y), no cálculo de integrais duplos

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \iint_D f(x, y)\ dxdy$$

conta com a transformação

$$\vec{T}(r, \theta) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \equiv (x, y)$$

que permite uma caraterização dos pontos (x, y) do domínio de integração D (no plano xOy) como pontos em coordenadas polares (r, θ) que constituem uma (nova) região R. O determinante de Jacobi de $\vec{T}$ é

$$\begin{aligned} \det J\left(\overrightarrow{T}\right)(r, \theta) &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & r \cdot \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r \cdot \cos^2\theta - \left(-r \cdot \sin^2\theta\right) = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r, \end{aligned}$$

logo, como $r \geq 0$, o módulo a considerar em (5) é

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right) = r.$$

A fórmula de mudança para coordenadas polares em integrais duplos resulta então em

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \boxed{\iint_D f(x, y)\ \ dxdy = \iint_R f(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot r\ drd\theta}.$$

Notemos ainda que, se admitimos que a função $f(x, y)$ é contínua em D, então a função composta

$$\left(f \circ \vec{T}\right)(r, \theta) = f(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$$

também é contínua em todos os pontos da região R.

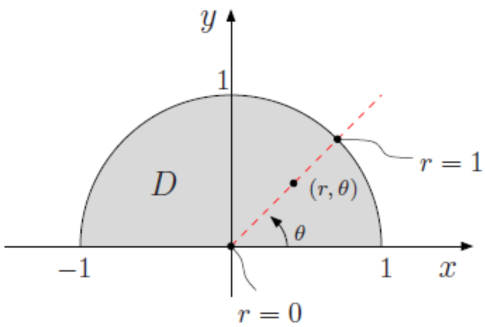
Exemplo 10 *Consideremos o integral duplo*

$$\iint_D \exp\left(x^2 + y^2\right)\ dA$$

onde o domínio de integração D é a região do plano limitada pela curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ e pelo eixo do x. A função integranda $f(x, y) = \exp\left(x^2 + y^2\right)$ não tem primitivação imediata nem em x nem em y, o que motiva uma mudança de coordenadas. Temos

$$y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \ \wedge \ y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ y \geq 0.$$

Logo o esboço de D é o semicírculo de centro na origem e raio 1 situada no 1º e 2º quadrantes.



Sendo D uma região circular centrada na origem O dos eixos, é de considerar a mudança para coordenadas polares. Em D a amplitude θ varia entre 0 (por exemplo, no ponto $(1, 0)$) e π (como no ponto $(-1, 0)$). Fixado $\theta \in [0, \pi]$, o raio polar r varia entre 0 (no ponto $(0, 0)$) e 1 (todos os pontos da semicircunferência de centro na origem e raio 1). Obtemos então uma região R caraterizada por

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad e \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Dado que a expressão x^2+y^2 presente na função integranda é r^2, temos

$$\begin{aligned}
\iint_D \exp\left(x^2+y^2\right)\ dA &= \iint_D \exp\left(x^2+y^2\right)\ dxdy = \iint_R \exp\left(r^2\right)\cdot r\ drd\theta \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \exp\left(r^2\right)\cdot r\ d\theta\right) dr \\
&= \int_0^1 \exp\left(r^2\right)\cdot r\cdot\left(\int_0^\pi 1\ d\theta\right) dr \\
&= \int_0^1 \exp\left(r^2\right)\cdot r\cdot [\theta]_0^\pi\ dr = \int_0^1 \exp\left(r^2\right)\cdot r\cdot\pi\ dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \exp\left(r^2\right)\cdot 2r\ dr = \frac{\pi}{2}\left[\exp\left(r^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e-1).
\end{aligned}$$

Note que o integral duplo podia, com o mesmo grau de dificuldade, ser calculado pela ordem $drd\theta$ por

$$\iint_D \exp\left(x^2+y^2\right)\ dA = \iint_R \exp\left(r^2\right)\cdot r\ drd\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \exp\left(r^2\right)\cdot r\ dr\right) d\theta.$$

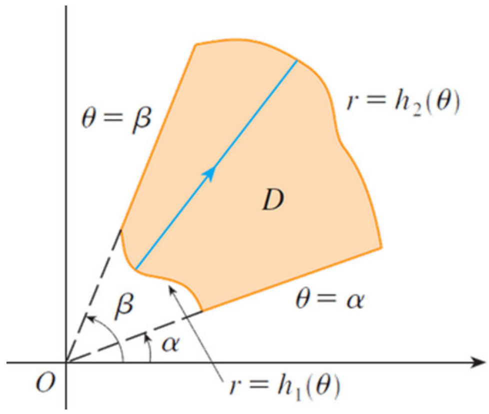
Nem sempre a caraterização em coordenadas polares de um domínio de integração D (no plano xOy) é uma região R do tipo

$$R=\{(r,\theta):\alpha\leq\theta\leq\beta\quad\wedge\quad a\leq r\leq b\}$$

com valores constantes α, β, a e b. A caraterização pode conduzir a uma região R do tipo

$$R=\{(r,\theta):\alpha\leq\theta\leq\beta\quad\wedge\quad g_1(\theta)\leq r\leq g_2(\theta)\}$$

para $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.



Neste caso, escrevemos

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\ dxdy &= \iint_R f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)\cdot r\ drd\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \left(\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)\cdot r\ dr\right) d\theta.\end{aligned}$$

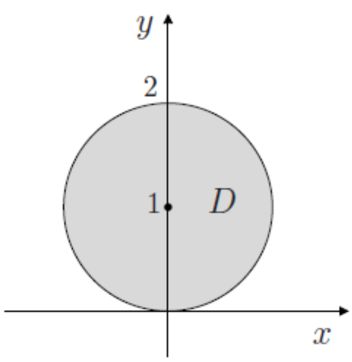
Exemplo 11 *Consideremos o integral duplo*

$$\iint_D 3x\ dA$$

onde o domínio de integração D *é a região do plano limitada pela curva* $x^2+y^2-2y=0$*. A curva* $x^2+y^2-2y=0$ *é a circunferência de centro* $(0,1)$ *e raio* 1*, atendendo ás equivalências*

$$x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1.$$

O esboço de D *é*



pelo que não é fácil o cálculo do integral duplo por qualquer uma das ordens de integração dxdy ou dydx. O uso de coordenadas polares é uma alternativa de cálculo. A curva $x^2 + y^2 - 2y = 0$ *é escrita em coordenadas polares como*

$$(r \cdot \cos\theta)^2 + (r \cdot \sin\theta)^2 - 2(r \cdot \sin\theta) = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r\sin\theta = 0,$$

(na verdade sabemos que $x^2 + y^2 = r^2$*). Temos ainda*

$$\begin{aligned} r^2 - 2r\sin\theta &= 0 \Leftrightarrow r \cdot (r - 2\sin\theta) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r - 2\sin\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \ r = 0 \ \vee \ r = 2\sin\theta. \end{aligned}$$

Como o eixo do x *é tangente à circunferência que limita o domínio* D*, então a amplitude do ângulo* θ *varia entre* 0 *e* π*. Obtemos então a região* R *definida por*

$$R = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \pi \quad \wedge \quad 0 \le r \le 2\sin\theta\}.$$

O integral duplo é então calculado como

$$\begin{aligned} \iint_D 3x \; dA &= \iint_D 3x \; dxdy = \iint_R 3(r \cdot \cos\theta) \cdot r \; drd\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\sin\theta} 3(r \cdot \cos\theta) \cdot r \; dr \right) d\theta = 3\int_0^{\pi} \cos\theta \cdot \left(\int_0^{2\sin\theta} r^2 \; dr \right) d\theta \\ &= 3\int_0^{\pi} \cos\theta \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\sin\theta} d\theta = 3\int_0^{\pi} \cos\theta \cdot \left(\frac{8\sin^3\theta}{3} - 0 \right) d\theta \\ &= 8\int_0^{\pi} \cos\theta \cdot \sin^3\theta \; d\theta = 8\left[\frac{\sin^4\theta}{4} \right]_0^{\pi} = 8(0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

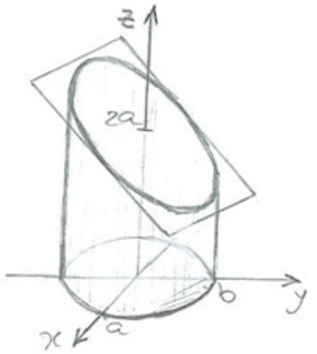
Consideremos agora o cálculo de um volume onde é útil a mudança para coordenadas polares.

Exemplo 12 *Pretendemos calcular o volume da região* S *do espaço limitada pelas superfícies*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z + y = 2a \quad e \quad z = 0,$$

com $0 < b < 2a$*.*

A superfície $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *é um cilindro elíptico que se desenvolve ao longo do eixo.do* z*. A superfície* $z+y=2a$ *é um plano paralelo ao eixo do* x*. A superfície* $z=0$ *é o plano* xOy*. Como tal, obtemos o seguinte esboço para a região* S*:*



Podemos considerar a elipse no plano xOy *de equação* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *como a maior secção plana* D *desta região* S*, ou seja,*

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}.$$

Assim, a região S *é definida por*

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in D\ \wedge\ 0\leq z\leq 2a-y\right\},$$

e o seu volume pode ser calculado pelo integral duplo

$$vol(S)=\iint_D(2a-y)dA.$$

Atendendo a que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2=1,$$

é conveniente aplicar a mudança para coordenadas X *e* Y *definida por*

$$X\equiv\frac{x}{a}\quad\wedge\quad Y\equiv\frac{y}{b},$$

para transformar a elipse (do plano xOy*) numa circunferência no plano* XOY*. Trata-se de tomar a transformação*

$$\vec{T}(X,Y)=(ax,by)=(X\left(x,y\right),Y\left(x,y\right))$$

cujo determinante de Jacobi é

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial(X,Y)}=ab.$$

Obtemos então

$$vol(S)=\iint_{D'}(2a-bY)\cdot ab\ dXdY$$

em que D' é definido por

$$D'=\left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 : X^2+Y^2=1\right\}.$$

Como D' é uma região circular do plano XOY centrada na origem, uma possibilidade de prosseguir com o cálculo é considerar a mudança para coordenadas polares segundo a relação

$$\left\{\begin{array}{l} X=r\cdot\cos\theta \\ Y=r\cdot\sin\theta \end{array}\right. .$$

Em D' temos a amplitude θ entre 0 e 2π e o raio polar r entre 0 e 1, a que corresponde

$$R=\{(r,\theta) : 0\leq\theta\leq 2\pi \quad\wedge\quad 0\leq r\leq 1\}.$$

Assim.

$$\begin{aligned}
vol(S) &= \iint_{D'}(2a-bY)\cdot ab\ dXdY=\iint_{R}[2a-b\,(r\cdot\sin\theta)]\cdot ab\cdot r\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(2a-br\sin\theta)\,abr\ dr\right)d\theta \\
&= ab\int_0^{2\pi}\left[2a\frac{r^2}{2}-b\frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_0^1 d\theta \\
&= ab\int_0^{2\pi}\left(a-b\frac{1}{3}\sin\theta\right)d\theta=ab\left[a\theta+b\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= ab\left(a2\pi+b\frac{1}{3}-b\frac{1}{3}\right)=2\pi a^2b.
\end{aligned}$$

2.4 Exercícios propostos

1. Considere o integral duplo

$$\iint_D xy \, dA$$

no domínio de integração D limitado pelas rectas $y = x+1, y = x, y = -x+4$ e $y = -x+1$.

(a) Mostre que $\frac{5}{2}$ é o valor do integral.

(b) Confirme o valor do integral quando utilizada a mudança para coordenadas u e v tais que

$$u = y - x \quad \text{e} \quad v = x + y.$$

2. Considere o integral duplo

$$I = \iint_D x \, dA$$

com $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ y \geq 0\}$.

(a) Calcule I pelas ordens de integração *dxdy* e *dydx*.

(b) Pode concluir, a partir da alínea anterior a), acerca do valor do integral duplo

$$I' = \iint_{D'} x \, dA$$

para $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ x \leq 0\}$?

(c) Calcule o valor do integral $I'' = \iint_D y \, dA$ pelas ordens de integração *dxdy* e *dydx*.

(d) Pode concluir, a partir da alínea anterior c), acerca do valor do integral duplo $I''' = \iint_{D'} y \, dA$?

(e) Confirme os valores obtidos para os integrais duplos I, I', I'' e I''' usando mudança para coordenadas polares.

3. Utilize uma mudança de coordenadas conveniente para calcular o integral duplo
$$\iint_D xy\ dA$$
sendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\}$.

4. Utilize coordenadas polares para calcular o valor do integral duplo
$$\iint_D y\ dA$$
com $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

5. Calcule o valor do integral duplo
$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ dA$$
com $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ y \geq 0\}$.

6. Mostre que
$$\iint_D xy^2\ dA = \frac{1185}{4}$$
sendo D o paralelogramo limitado pelas rectas
$$x = 3, \quad x = 5, \quad 3x + 2y - 4 = 0 \ \text{ e } \ 2y + 3x = 1.$$

7. Utilize uma mudança de coordenadas apropriada para mostrar que
$$\iint_D \left(xy + \frac{2y}{x^2}\right) dA = -\frac{4}{3}(1 + \ln 2)$$
sendo D o domínio plano limitado pelas curvas
$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y = \frac{1}{x} \ \text{ e } \ y = \frac{1}{x}.$$

8. Verifique que
$$\iint_D \left(2x^3 y + xy^2\right) dA = 4$$
para D limitado pelas curvas $y = x^2 + 1$, $y = x^2$, $xy = 3$ e $xy = 1$.

9. Mostre que
$$\iint_D \frac{1}{y^2}\, dA = \frac{\ln 2}{2}$$
onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \leq y \leq 2x\}$. Pode usar dois processos distintos de mudança de coordenadas.

10. Verifique, utilizando coordenadas polares, que
$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \frac{13\pi}{18}$$
com D definido pelas curvas $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$. [note que se usar outra mudança de coordenadas poderá obter o resultado na forma $\frac{26}{3} \ln \frac{1+\sqrt{3}}{2}$]

11. Verifique que
$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA = \frac{4\pi}{3}$$
para $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \ \wedge \ -y \leq x \leq y\}$.

12. Resolva o exercício 23.b. da Subsecção 1.1 através de coordenadas polares.

13. Confirme, através de coordenadas polares, que o volume da esfera de raio 2 é $32\pi/3$.

14. Determine o volume da região S do espaço limitado pelo parabolóide de equação $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ e pelo plano $z = 4$.

15. Calcule o volume da região S do espaço situada no interior do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$ e no interior do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

16. Calcule, usando mudança para coordenadas polares, o volume da região S do espaço limitada pelos seguintes planos e cilindros:

    (a) $z = 0$, $z = 10 + x + y$ e $x^2 + y^2 = 4$

    (b) $z = 1$, $z = 12 - 3x - 4y$ e $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

17. Determine o volume inscrito no elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

18. Determine o volume da região S do espaço limitada superiormente pelo parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pela região D do plano xOy que está no interior da circunferência $x^2 + y^2 = 2ax$.

19. Utilize duas mudanças de coordenadas consecutivas para calcular o valor do integral duplo

$$\iint_D (2x + y)\, dA$$

no domínio de integração D definido pela condição $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1.$

20. Utilize duas mudanças de coordenadas consecutivas para calcular o valor do integral duplo

$$\iint_D (2x + y)\, dA$$

no domínio de integração D definido pela condição $(x-3)^2+(y-2)^2 \leq 4.$

21. Mudando para coordenadas polares, calcule os seguintes integrais duplos:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dydx$

(c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dydx$

(d) $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}dydx$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy$

2.5 Soluções

2. a. $I=0$ (ficheiro manuscrito)

b. Não. O valor de I' é $-\dfrac{1}{3}$ (ficheiro manuscrito)

c. $I''=\dfrac{2}{3}$ (ficheiro manuscrito)

d. Sim (embora com muito cuidado!). O valor de I''' é $\dfrac{1}{3}$ (ficheiro manuscrito)

3. $\dfrac{1}{8}$

4. π

5. 2 (ficheiro manuscrito)

14. $\displaystyle\iint_D 6-3\left(x^2+y^2\right)\,dA=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\left(6-3r^2\right)\cdot r\ dr\right)d\theta=6\pi$

15. $\displaystyle\iint_D 2\sqrt{64-4\left(x^2+y^2\right)}\ dA=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2}2\sqrt{64-4r^2}\cdot r\ dr\right)d\theta$

$=\dfrac{64\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$

16. a. $\displaystyle\iint_D 10+x+y\ dA=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2}\left(1+r\cos\theta+r\sin\theta\right)\cdot r\ dr\right)d\theta=40\pi$

b. $\displaystyle\iint_D 12-3x-4y-1\ dA = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (11-6r\cos\theta-4r\sin\theta)\cdot 2\cdot r\ dr\right)d\theta$

$= 22\pi$

17. $\displaystyle\iint_D 2\sqrt{3-\frac{3}{4}\left(x^2+y^2\right)}\ dA = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 2\sqrt{3-\frac{3}{4}r^2}\cdot r\ dr\right)d\theta = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}$

18. $\displaystyle\iint_D x^2+y^2\ dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\theta} r^2\cdot r\ dr\right)d\theta = \frac{3a^4\pi}{2}$