Derivadas em funções com várias variáveis

Aproximação linear (Cad. 1)

Tópicos de Matemática II – 2019/20

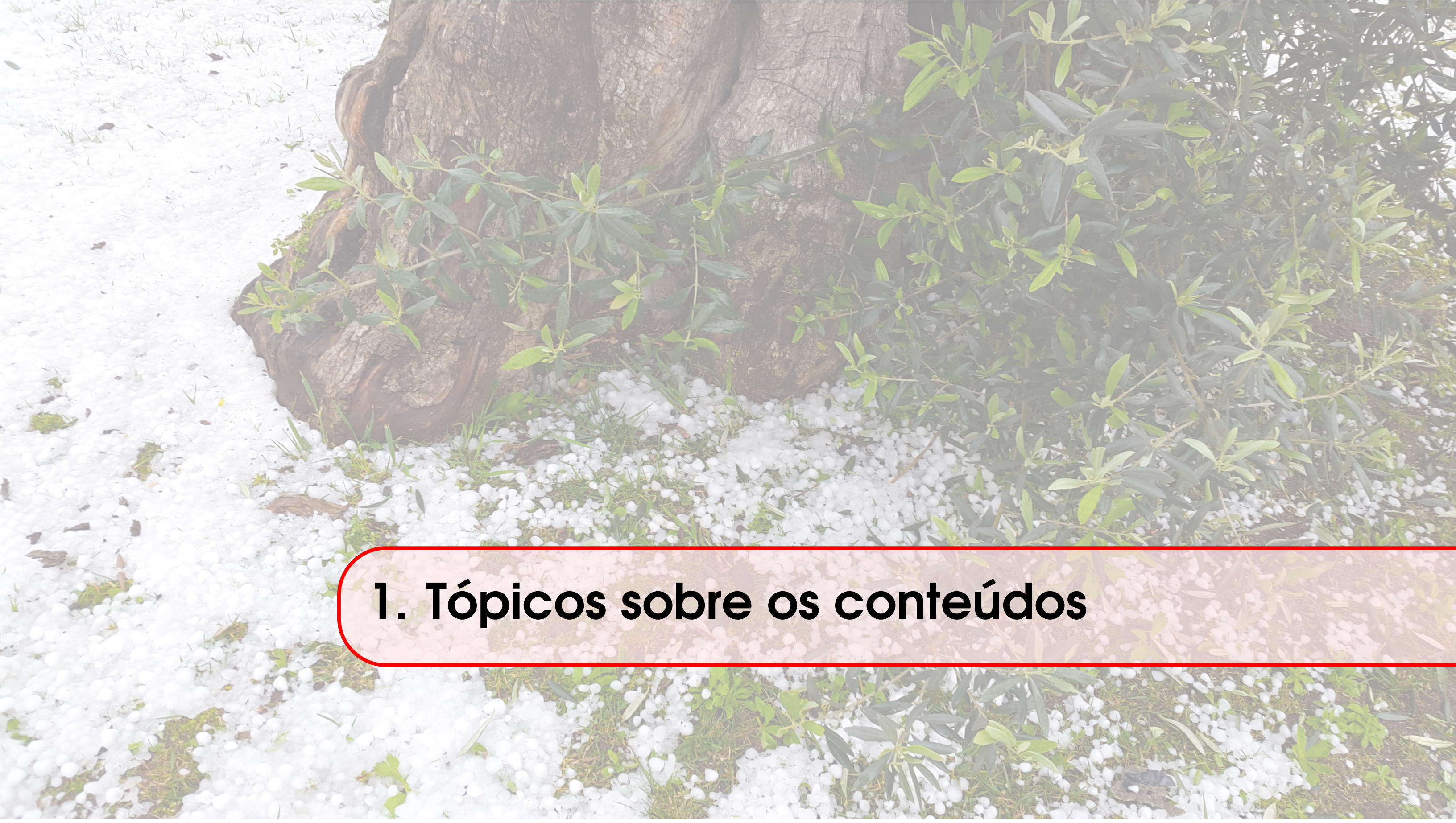
Departamento de Matemática – ISTA – ISCTE IUL

Rosário D. Laureano

"– Por favor, poderia me dizer que caminho devo seguir agora?
– Isso depende bastante de até onde você quer chegar."

Lewis Carrol - Alice no País das Maravilhas

Contents



1. Tópicos sobre os conteúdos

Nesta UC vamos seguir a evolução do conceito de função de uma só variável (iniciado em 1673 por Leibniz) para domínios de dimensão superior, maior ou igual a dois.

A necessidade do uso de funções a várias variáveis é evidente, visto que são frequentes na modelação de situações práticas em fenómenos da vida real, descrevendo de maneira única uma quantidade à custa de outras quantidades. A título de exemplo, podemos considerar:

- O custo de produção C de determinado produto depende essencialmente do custo da matéria prima c_1 e da mão de obra c_2, ou seja, de 2 variáveis independentes, $C = f(c_1, c_2)$;
- A temperatura T em determinado ponto da superfície da Terra depende da latitude l, da longitude L e da altitude a, ou seja, de 3 variávies independentes, $T = f(l, L, a)$.

O século XVI é apontado como o aquele em que a Matemática se desenvolveu para resolver problemas nas ciências físicas. Sendo o mundo físico multidimensional (3 dimensões espaciais e o tempo), muitas das grandezas usados nos modelos envolviam várias variáveis. A Astronomia foi uma das áreas rica em modelos multidimensionais. Podemos referir os trabalhos de:

- Galileu (1564-1642) em Astronomia, cinemática e resistência de materiais.
- Johannes Kepler (1571-1630) no desenvolvimento das três leis do movimento planetário, o qual ajudou a desacreditar o modelo egocêntrico de Ptolomeu e ajudou a estabelecer a teoria heliocêntrica de Copérnico.

A análise de funções com várias variáveis foi-se sucessivamente afirmando como uma área importante na Matemática e na generalidade das ciências, tanto ao nível da derivação - com o Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$ - como ao nível da integração - com o Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$. Podemos referir diversos nomes pioneiros nessa análise:

- Jean d'Alembert (1717-1783) - baseado nos trabalhos de Newton, de L'Hospital e de Bernoulli, o seu trabalho principal *Traité de dynamique* (1743) ajudou a que a diferenciação parcial fizesse parte do cálculo. Desenvolveu ainda métodos para resolver equações diferenciais e estudo o movimento de corpos considerando a resistência do meio;

- Joseph Louis Lagrange (1736-1813) - considerava como seu principal trabalho (que desenvolveu apenas com 19 anos) os métodos de optimização - existência de máximos e mínimos - a várias variáveis (técnica hoje conhecida como dos multiplicadores de Lagrange). Fez ainda aplicação do cálculo a várias va-riáveis à mecânica, essencialmente sobre equações de movimentos e entendimento da energia potencial, publicado em *Mécanique analytique* (1787);
- Pierre-Simon Laplace (1749-1827) - evidenciou-se, ainda jovem, num problema de gravitação mútua que tinha frustrado Euler e Lagrange e generalizou as leis da mecânica para aplicação ao movimento e à propriedades de corpos celestes, publicado em *Mécanique celeste*;
- Adrien Legendre (1752-1833) - trabalho avançado em equações diferenciais no âmbito da balística exterior, nomeadamente análise da curva descrita por bolas de canhão, tendo em conta a resistência do ar, e estudo do alcance quando conhecidas as velocidades iniciais.

1.1 Espaços $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$

Embora existam outras distâncias definidas em $\mathbb{R}^n$, consideremos a distância euclidiana definida por

$$d\left[(x_1,\ldots,x_n),(a_1,\ldots,a_n)\right]_{\mathbb{R}^n} = \|(x_1,\ldots,x_n)-(a_1,\ldots,a_n)\|,$$

ou seja,

$$d\left[(x_1,\ldots,x_n),(a_1,\ldots,a_n)\right]_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2} \in \mathbb{R}_0^+.$$

Em $\mathbb{R}$, ou seja para $n=1$, esta distância traduz-se pelo módulo da diferença entre os números reais,

$$d(x,a)_{\mathbb{R}} = \sqrt{(x-a)^2} = |x-a|.$$

Seja $(a_1,\ldots,a_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ e ε um número real positivo. A bola aberta de centro em $(a_1,\ldots,a_n)$ e de raio ε é o conjunto dos pontos $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto $(a_1,\ldots,a_n)$ é inferior a ε,

$$B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n) = \left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid d\left[(x_1,\ldots,x_n),(a_1,\ldots,a_n)\right]_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\right\}$$

ou ainda,

$$B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n) = \left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2} < \varepsilon\right\}.$$

N É útil concretizar a definição de bola aberta para os valores de n que mais vamos usar na UC:

- Para $n=1$ a bola aberta é o segmento de recta $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$.
- Para $n=2$ é o interior do círculo de centro (a_1,a_2) e raio ε, pois obtemos

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2<\varepsilon^2.$$

- Para $n=3$ a bola aberta é o interior da esfera de centro (a_1,a_2,a_3) e raio ε, pois obtemos

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2<\varepsilon^2.$$

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Um ponto $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior a D se existe uma bola aberta de centro em $(a_1,\ldots,a_n)$ e raio ε contida em D, ou seja,

$$\exists \varepsilon > 0 \;\mid\; B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n) \subset D.$$

Designamos o conjunto de todos os pontos interiores a D por interior de D e denotamo-lo por $Int(D)$. Assim, um ponto $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ é interior a D se pertence a D e também pertencem a D todos os pontos de uma vizinhança (mesmo que muito "pequena") de $(a_1,\ldots,a_n)$.

Um conjunto D diz-se **aberto** se todos os seus pontos são interiores, $D = Int(D)$.

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Um ponto $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de D se em qualquer bola aberta de centro $(a_1,\ldots,a_n)$ existe pelo menos um ponto de D distinto de $(a_1,\ldots,a_n)$, ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists (x_1,\ldots,x_n) \in D \setminus \{(a_1,\ldots,a_n)\}$ tal que

$$(x_1,\ldots,x_n) \in B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n).$$

Designamos o conjunto de todos os pontos de acumulação de D por derivado de D e denotamo-lo por D'. Um ponto que não seja de acumulação de D diz-se um ponto isolado de D.

Assim, um ponto $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ é de acumulação do conjunto D se em qualquer sua "vizinhança" existe pelo menos um outro ponto (diferente dele) que pertence a D. Ora, isso implica que em qualquer vizinhança de $(a_1,\ldots,a_n)$ não existe apenas um ponto de D mas infinitos pontos de D, ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0,\; B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n) \cap D \text{ é um conjunto infinito.}$$

1.2 Funções em $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$

1.2.1 Tipos de funções, domínios e gráficos

Distinguem-se dois tipos de funções com várias variáveis: funções escalares e funções vetoriais.

Funções escalares

Funções cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$, ou seja,

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto y = f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}.$$

com $n \geq 2$.

No caso mais estudado nesta UC, $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, em que $n = 2$, é comum usar (x,y) para a variável vetorial, em vez de (x_1,x_2), e z para denotar as imagens. Como tal, o gráfico de f é o conjunto dos pontos no espaço

$$Gr(f) = \left\{(x,y,z) \in D_f \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = f(x,y)\right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

que pode ser pensado como uma superfície no espaço.

■ **Exemplo 1.1** A função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

de domínio $D_f = \mathbb{R}^2$, tem como gráfico um parabolóide circular de vértice $(0,0,0)$ (Figura1.1) (Código em 2.1).

As funções

$$g(x,y) = 5 + x^2 + y^2$$

e

$$h(x,y) = (x-3)^2 + y^2,$$

têm o mesmo domínio. No entanto, o gráfico de g é um parabolóide circular de vértice $(0,0,5)$ (Figura 1.2) e o gráfico de h é um parabolóide circular de vértice $(3,0,0)$ (Figura 1.3) (Código em 2.2). Os gráficos de g e de h correspondem a translações do gráfico de f: translação segundo o vetor $\overrightarrow{v} = (0,0,5)$ e translação segundo o vetor $\overrightarrow{v} = (3,0,00)$, respetivamente. ■

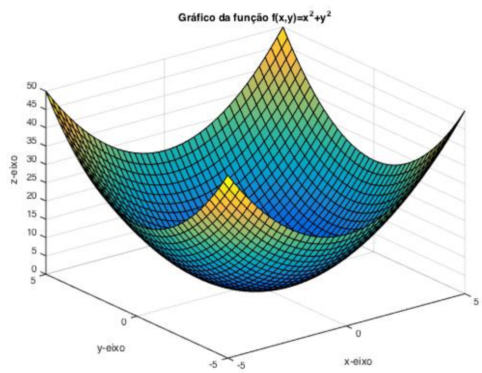


Figure 1.1: Gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-5,5]\times[-5,5]$ (Código em 2.1).

Funções vectoriais

Funções cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ com $m \geq 2$, ou seja,

$$\overrightarrow{F} : D_{\overrightarrow{F}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

A função $\overrightarrow{F}$ é definida através de um sistema de m funç ões $F_1,\ldots,F_m$ reais de n variáveis reais - designadas por funções componentes da função $\overrightarrow{F}$ - de modo que

$$(y_1,\ldots,y_m) = (F_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_m(x_1,\ldots,x_n)) \in \mathbb{R}^m.$$

A cada elemento n-dimensional $(x_1,\ldots,x_n)$, a função $\overrightarrow{F}$ faz correponder um e um só elemento

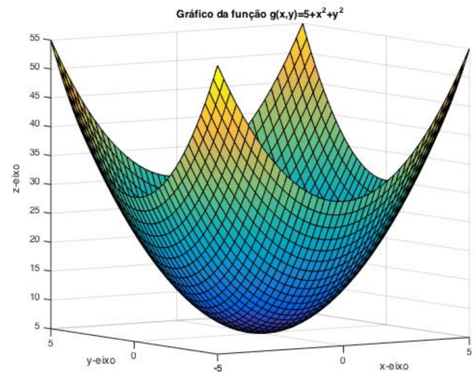


Figure 1.2: Gráfico da função $g(x,y) = 5 + x^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-5,5] \times [-5,5]$.

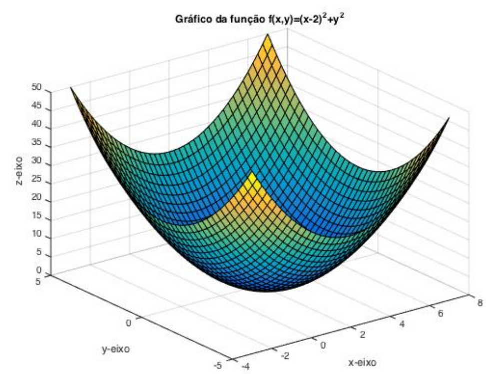


Figure 1.3: Gráfico da função $h(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-3,7] \times [-5,5]$ (Código em 2.2).

m-dimensional $(y_1, \ldots, y_m)$ como sua a imagem.

■ **Exemplo 1.2** A função $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\overrightarrow{F}(x_1,x_2,x_3) = \left(x_1 + 2, x_1x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, \frac{-4}{x_1^2 + x_2^2 + (x_3+2)^2} \right)$$

é uma função vetorial de variável vetorial (x_1,x_2,x_3). As suas funções componentes são

$$F_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2, \quad F_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_3, \quad F_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3,$$

e

$$F_4(x_1,x_2,x_3) = \frac{-4}{x_1^2 + x_2^2 + (x_3+2)^2}.$$

■

N Nesta UC vamos também abordar funções vectoriais numa só variável, ou seja, com $n=1$ (ou seja, para $\overrightarrow{F}: D_{\overrightarrow{F}} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$). Neste caso é usual a designação de função vetorial de variável escalar. Temos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.3 A função $\overrightarrow{F}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\overrightarrow{F}(x) = \left(x+3, x^2, \frac{2}{x-1}\right)$$

é uma função vetorial de variável escalar. As suas funções componentes são

$$F_1(x,y) = x+3, \quad F_2(x,y) = x^2 \quad \text{e} \quad F_3(x,y) = \frac{2}{x-1}.$$

Domínio de definição

É o conjunto de valores das variáveis para os quais é possível efectuar todas as operações indicadas na expressão que define a função e para obter resultados reais.
Como tal, há que ter em conta as condições seguintes:

- na estrutura $\frac{u}{v}$ exigir que $v \neq 0$
- na estrutura $\sqrt[n]{u}$ exigir que $u \geq 0$
- na estrutura u^v exigir que $u > 0$
- na estrutura $\log_a u$ exigir que $u > 0$
- na estrutura $\tan u$ exigir que $u \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$
- na estrutura $\cot u$ exigir que $u \neq \pm\pi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$
- na estrutura $\arcsin u$ ou $\arccos u$ exigir que $-1 \leq u \leq 1$

Quando temos uma função vetorial $\overrightarrow{F} = (F_1, \ldots, F_m): D_{\overrightarrow{F}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é necessário atender ao domínio das suas funções componentes F_i (com $i = 1, 2, \ldots, m$) pois, para garantir uma imagem com (todos os) m números reais, o domínio $D_{\overrightarrow{F}}$ é a interseção dos domínios das funções componentes,

$$D_{\overrightarrow{F}} = D_{F_1} \cap \cdots \cap D_{F_m}.$$

Exemplo 1.4 Considere a função vetorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y), F_3(x,y)) = \left(x^2+y^2, \frac{x}{y}, \frac{1}{y+2}\right),$$

cujas funções componentes são

$$F_1(x,y) = x^2+y^2, \quad F_2(x,y) = \ln(y), \quad F_3(x,y) = 1/(y+2).$$

Temos $D_{\overrightarrow{F}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} \subset \mathbb{R}^2$ obtido pela interseção

$$D_{\overrightarrow{F}} = D_{F_1} \cap D_{F_2} \cap D_{F_3} = \mathbb{R}^2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2\}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$$

1.2.2 Curvas de nível

Consideremos funções

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto y = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

.
Quando pretendemos saber quais os objectos que têm a mesma imagem $y = k$, consideramos a equação

$$k = f(x_1, \ldots, x_n),$$

que caracteriza a curva de nível k da função.

Exemplo 1.5 A curva de nível 14 da função $f(x,y) = 5 + x^2 + y^2$ é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 3 pois

$$14 = 5 + x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; 9 = x^2 + y^2$$

. A Figura 1.4 (Código em 2.3) mostra a representação de algumas das curvas de nível desta função, onde podemos observar a curva de nível 14 (a verde).

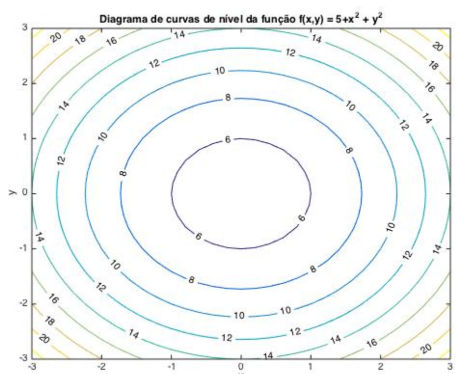


Figure 1.4: Diagrama de curvas de nível da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ restringido ao subconjunto $[-3,3] \times [-3,3]$ (Código em 2.3).

Exemplo 1.6 Considere a função $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ cujo gráfico é um parabolóide elíptico (Figura 1.7) (Código 2.4). A Figura 1.6 (Código em 2.5) mostra um diagrama de curvas de nível de f.

IMPORTANTE: Pode atender aos slides CN `https://dl.dropboxusercontent.com/u/43527540/ApoioGraficoaCurvasNiveleContorno.pdf` no estudo de curvas de nível.

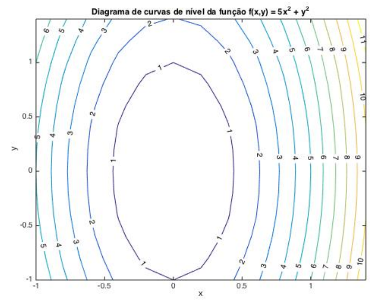


Figure 1.5: Diagrama de curvas de nível da função $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ restringido ao subconjunto $[-1,1.5] \times [-1,1.5]$ (Código em 2.5).

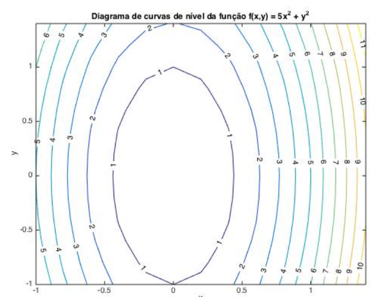


Figure 1.6: Diagrama de curvas de nível da função $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ restringido ao subconjunto $[-1,1.5] \times [-1,1.5]$ (Código em 2.5).

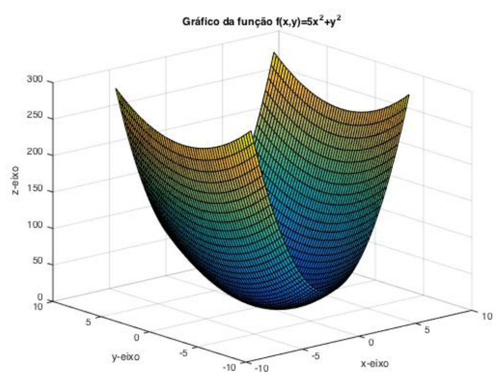


Figure 1.7: Gráfico da função $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ restringido ao subconjunto $[-1,1.5] \times [-1,1.5]$ (Código em 2.4).

1.2.3 Limites direccionais

A definição de limite é similar à que conhecemos em funções numa só variável. Contudo, vamos ver que exige cuidados redobrados. No que segue particularizamos para duas variáveis.

Consideremos uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a,b) um ponto de acumulação de D_f (Secção

1.1). Diz-se que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f no ponto (a,b) se e só se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, dependente do ε tomado, tal que $d(f(x,y), L) < \varepsilon$ sempre que $d((x,y),(a,b)) < \delta$ e $(x,y) \in D_f \setminus \{(a,b)\}$, ou seja, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$d((x,y),(a,b))_{\mathbb{R}^2} < \delta \ \wedge \ (x,y) \in D_f \setminus \{(a,b)\} \implies d(f(x,y), L)_{\mathbb{R}} < \varepsilon.$$

Considerando a distância euclidiana, temos $L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se e só se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \ \wedge \ (x,y) \in D_f \setminus \{(a,b)\} \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Esta definição é generalizável a qualquer dimensão $n > 2$. No caso de uma função vetorial, é feito o estudo do limite de cada uma das suas funções componentes no ponto (a,b) em estudo.

Relativamente a um ponto na recta real $\mathbb{R}$ apenas podemos considerar duas aproximações/acessos, ou pela sua esquerda ou pela sua direita. No entanto, a aproximação a um ponto (a,b) no plano $\mathbb{R}^2$ pode fazer-se através de qualquer uma das infinitas direcções do plano que passam nesse ponto. Como tal, quando ocorrem indeterminações há que considerar os limites relativos como casos particulares de limites em restrições da função f.
Podem ser considerados vários tipos de limites relativos:

Limites iterados ou sucessivos:

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] \quad \text{e} \quad \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right],$$

em que sucessivamente se resolvem dois limites numa só variável, ou x ou y;

Limites direccionais: considerando como caminho uma reta não-vertical de declive m que passa no ponto (a,b); neste caso o limite direccional é

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=m(x-a)+b}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x, m(x-a)+b),$$

um limite numa só variável (x). Em particular, se $(a,b) = (0,0)$ o limite direccional é

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx);$$

Limite segundo parábolas: considerando como caminho uma parábola de eixo vertical (ou de eixo horizontal) que tem o ponto (a,b) como vértice; neste caso o limite relativo é

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=k(x-a)^2+b}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f\left(x, k(x-a)^2+b\right),$$

um limite numa só variável (x). Em particular, se $(a,b) = (0,0)$ o limite relativo é

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f\left(x, kx^2\right).$$

Limites segundo outras curvas: considerando para caminho qualquer outra curva que passe no ponto (a,b).

O cálculo destes limites relativos apenas indicam acerca de um possível "candidato" a limite L no ponto (a,b), enquanto todos os calculados forem iguais, ou permitem concluir a inexistência de limite no ponto (a,b) quando são encontrados pelo menos dois com valores diferentes. O problema torna-se ainda mais difícil face à seguinte proposição:

Proposição 1.2.1 Uma função f tem limite L num ponto (a,b) se e só se L for o limite de f restringida a qualquer caminho que passe por esse ponto.

Segundo esta proposição é necessário que existam e tenham o mesmo valor todos os limites relativos. Embora os limites segundo rectas (e parábolas) sejam já em número infinito, é impossível calcular todos os limites relativos, ou seja, considerar todas os caminhos que passem pelo ponto (a,b). Como tal, só o uso da definição em (1.1) permite concluir a existência do limite de f num ponto (a,b). Para esse efeito, é em geral necessário o uso de algumas das seguintes desigualdades com módulos,

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{|x \pm y| \leq |x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\left|x^3-y^3\right| \leq \left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

bem como das seguintes igualdades com módulos,

$$\boxed{|x \times y| = |x| \times |y|}$$

$$\boxed{\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ para } y \neq 0}.$$

1.2.4 Continuidade

Consideremos uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de D_f (ver Seccção 1.1). A função f diz-se contínua no ponto(a,b) se e só se são verificadas as três condições seguintes:

- existe a imagem $f(a,b)$, ou seja, $(a,b) \in D_f$;
- existe o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$;
- são iguais os dois elementos anteriores, imagem e limite, ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)\,.$$

A continuidade de f no ponto (a,b) significa no essencial que "sempre que se tomam objectos (x,y) suficientemente próximos de (a,b) obtêm-se valores $f(x,y)$ das imagens tão próximos de $f(a,b)$ quanto se queira"

Uma função diz-se contínua se o for em todos os pontos do seu domínio. As funções polinomiais (seja qual for o seu grau) e as funções elementares (seno, coseno, exponencial) são funções contínuas.

No caso de uma função vetorial, a continuidade num ponto (a,b) é garantida pela continuidade de cada uma das suas funções componentes nesse ponto.

As regras operacionais com limites que conhecemos a uma só variável, continuam válidas em funções de variável vetorial. Como tal, se f e g forem continuas num ponto (a,b) também são contínuas a soma $f+g$, a diferença $f-g$, o produto $f\times g$, o produto por um escalar $k\in\mathbb{R}$, $k\cdot f$ e o quociente $\dfrac{f}{g}$ (onde estiver definido, ou seja, para (x,y) tal que $g(x,y)\neq 0$).
O mesmo é válido com a composição de funções: se as funções $\overrightarrow{F}:D_{\overrightarrow{F}}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $\overrightarrow{G}:D_{\overrightarrow{G}}\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ são contínuas em $(a_1,\ldots,a_n)$ e $\overrightarrow{F}(a_1,\ldots,a_n)$, respetivamente, com $\overrightarrow{F}\left(D_{\overrightarrow{F}}\right)\subset D_{\overrightarrow{G}}$, então a função composta $\overrightarrow{G}\circ\overrightarrow{F}$ também é contínua em $(a_1,\ldots,a_n)$.

N Se $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ é um ponto que não pertence ao domínio D_f de uma certa função $f:D_f\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mas é um ponto de acumulação de D_f e existe com valor finito o limite

$$L=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y),$$

então f diz-se prolongável por continuidade no ponto (a,b) (ou que f tem no ponto (a,b) uma descontinuidade removível). Significa que podemos construir uma nova função f^*, designada por prolongamento por continuidade de f ao ponto (a,b), por

$$f^*(x,y)\equiv\begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y)\in D_f \\ L & \text{se } (x,y)=(a,b)\end{cases}$$

cujo domínio é $D_{f^*}=D_f\cup\{(a,b)\}\neq D_f$.

1.3 Derivadas de funções em $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$

1.3.1 Derivadas parciais

Numa função $f(x,y)$ cada uma das variáveis x e y é uma variável independente e reservamos a notação de z para a variável dependente. Como tal, é possível considerar que x varia mantendo y como constante, e vice-versa. É o que se pretende com a seguinte definição de derivada parcial.

Sejam $f:D_f\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Definem-se as derivadass:

derivada parcial de 1ª ordem de f na variável x no ponto (a,b), que se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ (ou ainda por $D_x f(a,b)$ ou $f'_x(a,b)$), é dada pelo limite numa só variável

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$

onde é considerado um "acréscimo infinitésimal" h apenas na abcissa do ponto (a,b). Como tal, mede a taxa de variação instantânea de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos xx, por unidade de comprimento.

derivada parcial de 1ª ordem de f na variável y no ponto (a,b), que se denota por $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ (ou ainda, $D_y f(a,b)$ ou $f'_y(a,b)$), é dada pelo limite numa só variável

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h},$$

onde é considerado um "acréscimo infinitesimal" h apenas na ordenada do ponto (a,b). Como tal, mede a taxa de variação instantânea de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos yy, por unidade de comprimento.
É mais comum usar k em vez de h (mera escolha de letras!!) na derivada parcial de 1ª ordem na variável y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

N **IMPORTANTE:** Pode apoiar-se nos slides DD `https://dl.dropboxusercontent.com/u/43527540/ApoioGraficoaDerivParceDiferencib.pdf` no estudo das derivadas parciais de 1ª ordem e, em particular, para o que a seguir é exposto.

Qual o significado geométrico das derivadas parciais de 1ª ordem $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e de $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$?

Seja S a superfície do gráfico da função da $z = f(x,y)$. O significado geométrico das derivadas parciais é simples - generalizando o que conhecemos para funções com uma só variável - e decorre de considerarmos as duas curvas que resultam dos "cortes" sobre S pelos planos verticais $x = a$ e $y = b$, planos que passam no ponto $(a,b,f(a,b))$.

Seja C a curva que resulta da interseção do plano vertical $y = b$ com a superfície S. Sendo C a curva pela qual o plano $y = b$ "corta" a superfície S, então C é paralela ao plano xOz. A função f não varia com y sobre a curva C (note que sobre C temos $y = b$, qualquer que seja x); C é o gráfico de uma função de uma variável, a variável x, definida por $z = f(x,b)$. Se a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

mede a taxa de variação instantânea de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos xx, então ela é o declive da recta t tangente à curva C no ponto $(a,b,f(a,b))$. O vector director da recta t é

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right).$$

Por outro lado, seja c a curva que se obtem pela intersecção do plano vertical $x = a$ com a superfície S. Logo c é paralela ao plano yOz. Sobre a curva c a função f não varia com x (sobre c temos $x = a$, qualquer que seja y); c é o gráfico de uma função de uma variável, a variável y, definida por $z = f(a,y)$. Se a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

mede a taxa de variação instantânea de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos yy, então ela é o declive da recta T tangente à curva c no ponto $(a,b,f(a,b))$. O vector director da recta T é

$$\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

Em muitas situações, o cálculo das derivadas parciais num ponto (a,b) pode ser efectuado através das regras derivação já conhecidas para funções com uma só variável, dispensando o cálculo dos limites que definem essas derivadas. Para obter:

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$**:** derivamos em ordem a x considerando y como constante e, após obter a expressão geral da derivada parcial, calculamos o seu valor no ponto (a,b);

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$**:** derivamos em ordem a y considerando x como constante e, após obter a expressão geral da derivada parcial, calculamos o seu valor no ponto (a,b).

No entanto, só procedemos desse modo quando, se usassemos a definição, existia uma expressão comum onde iríamos obter $f(a,b)$ e $f(a+h,b)$ (ou então$f(a,b+k)$). Tal não sucede quando a função f é definida por "imposição" no ponto (a,b) ou quando (a,b) é um ponto que pertence a uma "curva de mudança de ramos" da função f; nesses casos, recorremos ao cálculo direto pela definição.

A existência de derivadas parciais de 1ª ordem de f num ponto (a,b) com valor finito não implica a continuidade de f nesse ponto, embora obviamente implique a continuidade relativamente a cada variável, ou seja, como função apenas na variável x e como função apenas na variável y.

Seguem-se alguns resultados de continuidade num ponto (a,b) com base nas derivadas parciais de 1ª ordem em pontos duma viznhança de (a,b):

Proposição 1.3.1 Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b)\in D_f$ um ponto interior a D_f. Se as funções derivadas parciais de 1ª ordem de f existem e são limitadas nos pontos de uma bola centrada em (a,b) então a função f é contínua no ponto (a,b).

Proposição 1.3.2 Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b)\in D_f$ um ponto interior a D_f. Se as funções derivadas parciais de 1ª ordem de f existem com valor(es) finito(s) no ponto (a,b) e pelo menos uma é limitada nos pontos de uma bola centrada em (a,b) então a função f é contínua no ponto (a,b).

Se ambas as derivadas parciais de 1ª ordem de f num ponto (a,b) existem e são finitas, define-se o gradiente de f no ponto (a,b), que se denota por $\overrightarrow{grad} f(a,b)$ ou $\nabla f(a,b)$ (note que ∇ se lê *nabla*), como o vector dessas derivadas parciais:

$$\overrightarrow{grad} f(a,b) = \nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).$$

A projecção do vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b)$ sobre o eixo dos xx é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e a projecção do vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b)$ sobre o eixo dos yy é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$), pois

$$\overrightarrow{grad} f(a,b) = \nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot\overrightarrow{e_2}$$

em que $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Se o vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b)$ é não-nulo, então ele é perpendicular à curva de nível $f(a,b)$ da função f, e aponta na direcção e sentido de crescimento da função f a partir do ponto (a,b).

■ **Exemplo 1.7** A curva de nível 25 da função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 9$ é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 4, pois

$$x^2 + y^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16.$$

Portanto, 25 é a imagem de todos os pontos sobre esta circunferência, por exemplo: $25 = f(0,4) = f(-4,0) = f(\sqrt{8}, \sqrt{8})$. A expressão geral do vector gradiente é

$$\overrightarrow{grad} f(x,y) = (2x, 2y),$$

que vamos calcular em cada um dos pontos referidos:

$\overrightarrow{grad} f(0,4) = (0,8)$, que é perpendicular à circunferência no ponto $(0,4)$;

$\overrightarrow{grad} f(-4,0) = (-8,0)$, que é perpendicular à circunferência no ponto $(-4,0)$;

$\overrightarrow{grad} f(\sqrt{8}, \sqrt{8}) = (2\sqrt{8}, 2\sqrt{8})$, que é perpendicular à circunferência no ponto $(0,4)$. ■

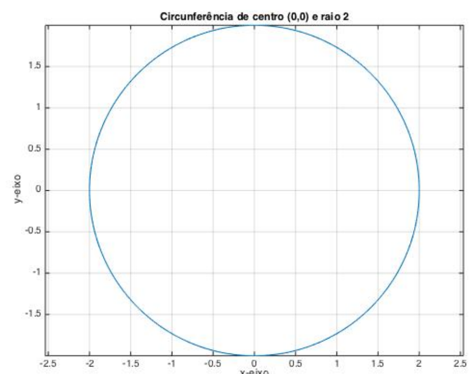


Figure 1.8: Gráfico da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 2, de equação $x^2 + y^2 = 4$ (Código em 2.6).

■ **Exemplo 1.8** A curva de nível 6 da função $f(x,y) = 2x + y$ é a recta $2x + y = 6$, ou seja, $y = 6 - 2x$. Um vector director desta recta é $(1,-2)$. Portanto, 6 é a imagem de todos os pontos sobre esta recta, por exemplo: $6 = f(1,4) = f(2,2) = f(0,6)$. A expressão geral do vector gradiente é

$$\overrightarrow{grad} f(x,y) = (2,1).$$

Qualquer que seja o ponto, o vector gradiente é perpendicular à recta no respetivo ponto, pois

$$(2,1) \mid (1,-2) = 2 - 2 = 0.$$

■

São válidas as seguintes propriedades, sempre que bem definidas, envolvendo o vector gradiente:

$$\overrightarrow{grad}(k\cdot f) = k\cdot \overrightarrow{grad} f,\ \ k = \text{constante}$$

$$\overrightarrow{grad}(f+g) = \overrightarrow{grad} f + \overrightarrow{grad} g$$

$$\overrightarrow{grad}(f\cdot g) = \overrightarrow{grad} f\cdot g + f\cdot \overrightarrow{grad} g$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\overrightarrow{grad} f\cdot g - f\cdot \overrightarrow{grad} g}{g^2}$$

$$\overrightarrow{grad}(f^k) = k\cdot f^{k-1}\cdot \overrightarrow{grad} f$$

1.3.2 Matriz Jacobiana

De certo modo, o conceito de vector gradiente generaliza-se a funções vectoriais através da matriz Jacobiana que também reune as derivadas parciais de 1ª ordem.

Sejam $\overrightarrow{F} : D_{\overrightarrow{F}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $m \geq 2$, uma função vetorial de n variáveis reais definida por m funções componentes $F_1,\ldots,F_m$ reais de n variáveis reais, e $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto interior a $D_{\overrightarrow{F}}$. Se existem todas as derivadas parciais de 1ª ordem das funções componentes $F_1,\ldots,F_m$ no ponto $(a_1,\ldots,a_n)$ e se são finitas, define-se a matriz Jacobiana (ou matriz de Jacobi) de $\overrightarrow{F}$ no ponto $(a_1,\ldots,a_n)$, que se denota por $J\overrightarrow{F}\,(a_1,\ldots,a_n)$ ou $\nabla\overrightarrow{F}\,(a_1,\ldots,a_n)$ como a matriz $m\times n$ dessas derivadas parciais,

$$\nabla\overrightarrow{F}\,(a_1,\ldots,a_n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(a_1,\ldots,a_n) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(a_1,\ldots,a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(a_1,\ldots,a_n) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(a_1,\ldots,a_n) \end{bmatrix}_{m\times n},$$

que se resume como

$$\nabla\overrightarrow{F}\,(a_1,\ldots,a_n) = \left[\frac{\partial\,(F_1,\ldots,F_m)}{\partial\,(x_1,\ldots,x_n)}(a_1,\ldots,a_n)\right]_{m\times n}.$$

N ∇ é o operador sobre funções

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

que se designa por operador de Hamilton.

Se a matriz for quadrada, o seu determinante designa-se por Jacobiano de $\overrightarrow{F}$ no ponto $(a_1,\ldots,a_n)$. O elemento genérico da matriz Jacobiana $\nabla\overrightarrow{F}\,(a_1,\ldots,a_n)$ é

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a_1,\ldots,a_n)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}.$$

Na linha i estão as sucessivas derivadas parciais de 1ª ordem da função componente F_i, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(a_1,\ldots,a_n)$ para $j=1,\ldots,n$. Na coluna j estão as derivadas parciais na variável x_j das sucessivas funções componentes $F_1,\ldots,F_m$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(a_1,\ldots,a_n)$ para $i=1,\ldots,m$.

Se $m=1$ a matriz Jacobiana tem uma única linha: é uma matriz linha (de tipo $1\times n$) cuja matriz transposta é o vector gradiente de $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no ponto $(a_1,\ldots,a_n)$ interior a D_f,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{grad} f(a_1,\ldots,a_n) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,\ldots,a_n)\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\ldots,a_n)\cdot\overrightarrow{e_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,\ldots,a_n)\cdot\overrightarrow{e_n}.\end{aligned}$$

1.3.3 Plano tangente e aproximação linear

Uma função $f: D_f\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diz-se diferenciável num ponto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ interior ao seu domínio D_f se e só se existem com valor finito as derivadas parciais de 1ª ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ e ainda

$$f(x,y)\approx f(a,b)+(x-a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

para pontos (x,y) tão próximos de (a,b) quanto se queira. Esta noção de proximidade ao ponto (a,b) pode ser formalizada através da igualdade

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\varepsilon(x-a,y-b), \tag{1.2}$$

exigindo que $\varepsilon(x-a,y-b)$ seja infinitamente pequeno quando comparado com a distância dos pontos (x,y) ao ponto (a,b), ou seja, desde que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\varepsilon(x-a,y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|}=0. \tag{1.3}$$

Este limite traduz-se por

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-(x-a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)-(y-b)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0,$$

atendendo à expressão de $\varepsilon(x-a,y-b)$ obtida da igualdade (1.2). A igualdade (1.2), acompanhada da condição (1.3), diz-se o desenvolvimento de Taylor de 1ª ordem de f no ponto (a,b).

A condição (1.3), no contexto da igualdade (1.2), garante a diferenciabilidade de f em (a,b) o que, geometricamente, se traduz na possibilidade de considerar o plano de equação

$$z = f(a,b) + (x-a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),$$

como uma boa aproximação da superfície do gráfico de f, definida por $z = f(x,y)$, numa vizinhança do ponto $(a,b,f(a,))$; como se sucessivos *zoom* com foco no ponto $(a,b,f(a,))$ nos fizessem ver a superfície do gráfico como um plano. Este plano passa pelo ponto $(a,b,f(a,b))$ e contém as rectas t e T tangentes às curvas C e c (atrás referidas), respetivamente, sendo designado por plano tangente à superfície do gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,))$. Ele tem por vector normal

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right),$$

que é perpendicular aos vectores directores $\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$ e $\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ das rectas tangentes t e T. O vector $\overrightarrow{n}$ é designado por vector normal ao plano tangente. A recta normal ao plano tangente no ponto $(a,b,f(a,b))$, que tem $\overrightarrow{n}$ como vector director, designa-se por recta normal ao gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,b))$.

Pelas mudanças de variável $x-a=h$ e $y-b=k$ a condição (1.3) transforma-se em

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

onde no numerador está a expressão de $\varepsilon(h,k)$,

$$\varepsilon(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \tag{1.4}$$

Assim, o limite acima pode ser escrito resumidamente como

$$\lim_{h\to 0,k\to 0} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{1.5}$$

A existência de derivadas parciais de 1ª ordem de f num ponto (a,b) garante a existência de duas rectas tangentes ao gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,b))$, paralelas aos planos coordenados xOz e yOz, mas não garante (não é suficiente embora seja necessário) a existência de um plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,b))$. Para tal é necessário ter a igualdade

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \varepsilon(h,k), \tag{1.6}$$

equivalente a (1.2), e que se verifique a condição (1.5), ou seja, que f seja diferenciável em (a,b). Na prática, a condição (1.5) equivalente a (1.3), funciona como "teste de diferenciabilidade" de f no ponto (a,b), após obtermos $\varepsilon(h,k)$ a partir da igualdade (1.6), conforme escrito em (1.4).

■ **Exemplo 1.9** A função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

não é diferenciável em $(0,0)$ embora ambas as derivadas parciais de 1ª ordem tenham valor finito, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ Note que o cálculo destas derivadas parciais é feito directamente pela definição. O plano obtido pela expressão

$$z = f(0,0) + (x-0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + (y-0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

é $z = 0$ mas este não é tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$. Atenda aos slides DD `https://dl.dropboxusercontent.com/u/43527540/ApoioGraficoaDerivParceDiferencib.pdf` onde pode encontrar este exemplo mais desenvolvido e acompanhado de figuras elucidativas. Contudo, a prova da não-diferenciabilidade (logo a não existência de plano tangente) exige o cálculo do limite (1.5): o limite segundo rectas $k = mh$ não resulta em 0 sempre que $m \neq 0$ (é aconselhado a verificar...), logo (1.5) não se verifica. Também pode confirmar que existem pontos de intersecção (resolução de um sistema) da superfície do gráfico com o plano $z = 0$ tão perto quanto se queira de (0,0,0): são todos os pontos (a,0) e (0,b), $\forall a, b \in \mathbb{R}$. ■

Qualquer função polinomial é diferenciável, independentemente do número de variáveis. O mesmo é válido para as funções conhecidas como elementares. Além disso, para $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in Int(D_f) \cap Int(D_g)$, se f e g são diferenciáveis em (a,b) então também são diferenciáveis nesse ponto as funções: $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $k \cdot f$ (para $k \in \mathbb{R}$) e ainda $\dfrac{f}{g}$ para todo o $(x,y) \in D_g$ onde $g(x,y) \neq 0$.

Diferencial e acréscimo

O limite (1.5) garante a aproximação

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Esta possibilidade de obter valores aproximados das imagens de f em pontos $(a+h, b+k)$ próximos de (a,b) atrvés de um polinómio de grau 1 que envolve a imagem $f(a,b)$ e as derivadas parciais de 1ª ordem no ponto (a,b) é formalizada na proposição seguinte, onde usamos a aproximação

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

equivalente à anterior com $x = a+h$ e $y = b+k$.

Proposição 1.3.3 (**Aproximação linear**) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se a função f é diferenciável no ponto (a,b) então é valida a aproximação linear

$$f(x,y) - f(a,b) \approx (x-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b),$$

no cálculo de valores aproximados da função f em torno de (a,b).

Conforme exposto atrás, a aproximação presente nesta proposição é equivalente a

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,,$$

com $h = x-a$ e $k = y-b$. A aproximação presente nesta proposição,

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) \approx h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

tem no lado esquerdo o acréscimo de f no ponto (a,b) e no lado direito o diferencial de 1ª ordem (ou simplesmente diferencial) de f no ponto (a,b), para os acréscimos h e k das variáveis x e y:

Diferencial de 1ª ordem de f no ponto (a,b) para os acréscimos h e k das variáveis x e y, que se denota por $df(a,b)$, é a soma

$$df(a,b) = h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,.$$

É comum usar dx em vez de h e dy em vez de k para os acréscimos das variáveis x e y, respetivamente, ou seja,

$$df(a,b) = dx\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + dy\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,.$$

Acréscimo de f no ponto (a,b) para os acréscimos h e k das variáveis x e y, que se denota por $\Delta f(a,b)$, é a diferença

$$\Delta f(a,b) = f(a+h,b+dy) - f(a,b)\,,$$

ou ainda (conforme é mais comum),

$$\Delta f(a,b) = f(a+dx,b+dy) - f(a,b)\,,$$

É garantido pela Proposição anterior que, se f for diferenciável em (a,b), o diferencial de 1ª ordem $df(a,b)$ é uma boa aproximação do acréscimo $\Delta f(a,b)$ se os acréscimos dx e dy das variáveis x e y, respetivamente, forem muito pequenos,

$$\Delta f(a,b) = f(a+dx,b+dy) - f(a,b) \approx dx\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + dy\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = df(a,b)\,.$$

Dado que $\Delta f(a,b) = f(a+h,b+dy) - f(a,b)$, obtemos de $\Delta f(a,b) \approx df(a,b)$ que

$$f(a+dx,b+dy) \approx f(a,b) + df(a,b)\,,$$

ou seja, que o diferencial de 1ª ordem $df(a,b)$ permite obter valores aproximados das imagens por f em pontos $(a+dx,b+dx)$ próximos de (a,b).

Diferenciabilidade e continuidade

A existência com valor(es) finito(s) das derivadas parciais de 1ª ordem de f num ponto (a,b) interior a D_f é condição necessária para a diferenciabilidade de f em (a,b). No entanto, não é condição suficiente seja qual for o valor dessas derivadas parciais. Note ainda que a existência de tais derivadas parciais com valor finito nem sequer garante a continuidade de f em (a,b).

Exemplo 1.10 A função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

tem derivadas parciais com valor finito em $(0,0)$, ambas têm valor nulo (exemplo anterior), mas não é diferenciável em $(0,0)$ (é aconselhado a verificar...).

Se uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ interior a D_f então f é contínua nesse ponto. Temos então a implicação

$$\text{Diferenciabilidade em } (a,b) \implies \text{Continuidade em } (a,b).$$

Contudo, a implicação inversa não é válida: existem funções contínuas num ponto sem que sejam diferenciáveis nesse ponto; digamos que a diferenciabilidade é "mais exigente" que a continuidade).

Exemplo 1.11 A função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

não é diferenciável em $(0,0)$ mas é contínua em $(0,0)$ (é aconselhado a verificar...).

No entanto, se sabemos que determinada função não é contínua num ponto (a,b) então podemos concluir que ela também não é diferenciável nesse ponto,

$$\text{Descontinuidade em } (a,b) \implies \text{Não-diferenciabilidade em } (a,b).$$

Trata-se de aplicar o contra-recíproco na negação de implicações: a proposição $(\sim C \Rightarrow \ \sim D)$ é a contra-recíproco de $(D \Rightarrow C)$.

É válida a seguinte condição para garantia de diferenciabilidade:

Proposição 1.3.4 **Condição suficiente de diferenciabilidade.** Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se existem com valor(es) finito(s) as derivadas parciais de 1ª ordem de f em (a,b) e se uma das funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ é contínua numa bola aberta de centro (a,b) então f é diferenciável em (a,b).

É válido o seguinte resultado relativo à continuidade das funções derivadas parciais de 1ª odem:

Proposição 1.3.5 Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se a função f é diferenciável em (a,b) então as derivadas parciais de 1ª ordem de f em (a,b) existem e têm valor(es) finito(s). Além disso, as funções derivadas parciais de 1ª ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas em (a,b).

1.3.4 Derivadas direccionais

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais, (a,b) um ponto de $\mathbb{R}^2$ interior a D_f e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^2$.

A derivada direccional f no ponto (a,b) segundo o vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, que se denota por $f'_{(v_1,v_2)}(a,b)$ (ou ainda $D_v f(a,b)$, $D_{(v_1,v_2)} f(a,b)$ ou $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$) é definida pelo limite (em $\mathbb{R}$)

$$f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b)+h\cdot(v_1,v_2)) - f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv_1, b+hv_2) - f(a,b)}{h}.$$

Enquanto pelas derivadas parciais de 1ª ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

se faz, respetivamente, variar x mantendo y como constante e vice-versa, através da derivada direccional é possível considerar ambas as variáveis x e y a variar simultaneamente.

Quando se divide um vector não-nulo $\overrightarrow{v}$ pela sua norma, obtemos um vector de norma 1, designado por versor de $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{vers}(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{\|(v_1,v_2)\|} \cdot (v_1,v_2) = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \cdot (v_1,v_2) = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \right).$$

Neste caso, a derivada direcional se pode ser designada por derivada dirigida.

N Dado $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} = (1,0)$, um dos vectores da base canónica $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$, a derivada dirigida

$$\begin{aligned} f'_{\overrightarrow{e_1}}(a,b) &= f'_{(1,0)}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b)+h\cdot(1,0)) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \end{aligned}$$

mede a taxa de variação de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos xx por unidade de comprimento, visto que o vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} = (1,0)$ é unitário.

Analogamente, dado $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2} = (0,1)$, o outro vector da base canónica $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$, a derivada dirigida

$$\begin{aligned} f'_{\overrightarrow{e_2}}(a,b) &= f'_{(0,1)}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b)+h\cdot(0,1)) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \end{aligned}$$

mede a taxa de variação de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos yy por unidade de comprimento, visto que o vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2} = (0,1)$ é unitário.

Quando f é diferenciável no ponto (a,b), e não é definida por imposição nesse ponto, então

$$f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = (v_1,v_2)|\overrightarrow{grad} f(a,b) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b),$$

para todo o vector $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2) = v_1 \cdot (1,0) + v_2 \cdot (0,1) = v_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + v_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$. Neste caso, a derivada direccional da função f num ponto (a,b) segundo um vector $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2)$ pode ser expressa em termos do vector $\overrightarrow{grad} f$.

A fórmula anterior pode escrever-se como

$$f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \|(v_1,v_2)\| \cdot \left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\| \cdot \cos\theta$$

em que θ é o menor ângulo entre os vectores

$$\overrightarrow{grad} f(a,b) \neq \overrightarrow{0} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v} = (v_1,v_2) \neq \overrightarrow{0}$$

Esta fórmula também é válida em $\mathbb{R}^3$. Quando $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ temos apenas

$$f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\| \cdot \cos\theta.$$

Neste caso, e considerando que $\overrightarrow{grad} f(a,b) \neq \overrightarrow{0}$, a derivada dirigida $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$:

- tem valor 0 quando $\overrightarrow{v}$ é ortogonal ao vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b)$ pois, neste caso, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;
- atinge o valor máximo $\left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\|$, quando $\overrightarrow{v}$ é tem a direcção e sentido do vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b)$, ou seja,

$$\overrightarrow{v} = (v_1,v_2) = \frac{\overrightarrow{grad} f(a,b)}{\left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\|},$$

  pois, nesse caso, $\cos\theta = \cos 0 = 1$, o valor máximo atingido pelo coseno;
- atinge o valor mínimo $-\left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\|$, quando $\overrightarrow{v}$ é tem a mesma direcção mas sentido oposto ao vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b)$, ou seja,

$$\overrightarrow{v} = (v_1,v_2) = -\frac{\overrightarrow{grad} f(a,b)}{\left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\|},$$

  pois, nesse caso, $\cos\theta = \cos\pi = -1$, o valor mínimo atingido pelo coseno.

Como tal, a taxa de variação de f no ponto (a,b) é máxima (respetivamente, mínima) na direcção e sentido do vector unitário (único) $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2)$ que tenha a mesma direcção e o mesmo sentido (respetivamente, sentido oposto ao) do vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b)$. Podemos dizer que o vector gradiente aponta, em cada ponto, na direcção da maior taxa de variação da função e que o módulo do vector gradiente é essa taxa de variação máxima.

■ **Exemplo 1.12** Suponhamos que num certo ponto (a,b) uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem o vector gradiente $\overrightarrow{grad} f(a,b) = (3,4)$. O vector unitário $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ com a mesma direcção e sentido do vector gradiente é

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

pois $\|(3,4)\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Como tal, a taxa de variação máxima de f no ponto (a,b) é 5, dada pela derivada dirigida

$$f'_{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}(a,b) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Big| (3,4) = \frac{3}{5}\cdot 3 + \frac{4}{5}\cdot 4 = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5 = \left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\|.$$

O vector unitário $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ com a mesma direcção e sentido oposto ao vector gradiente é

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) = -(v_1, v_2) = -\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Como tal, a taxa de variação mínima de f no ponto (a,b) é -5, dada pela derivada dirigida

$$f'_{\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}(a,b) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \Big| (3,4) = -\frac{3}{5}\cdot 3 + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 4 = -\frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -5 = -\left\|\overrightarrow{grad} f(a,b)\right\|.$$

■

Quando é conhecido o ângulo α que um vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ faz com a parte positiva do eixo dos xx então são válidas as relações

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\overrightarrow{v}\|} \qquad \text{e} \qquad \sin\alpha = \frac{v_2}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Como tal, é possível estabelecer a proposição seguinte:

Proposição 1.3.6 Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (a,b) um ponto de $\mathbb{R}^2$ interior a D_f e $\overrightarrow{v}$ um vector não-nulo de $\mathbb{R}^2$. Suponha ainda que f é diferenciável no ponto (a,b) e não é definida por imposição nesse ponto. Se α é o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx então a derivada direccional $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$ pode ser calculada por

$$f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = \cos\alpha \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \sin\alpha \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

N Quando $\overrightarrow{v}$ é um vector unitário então a derivada dirigida $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$ pode ser calculada por

$$f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = \cos\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \sin\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Os cosenos directores de um vector são os cosenos dos ângulos que o vector faz com a parte positiva de cada um dos eixos coordenados. No caso de um vector de $\mathbb{R}^3$, seja α o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx, β o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos yy e γ o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos zz. Temos a proposição seguinte (que obviamente sabemos adaptar para dimensão 2):

Proposição 1.3.7 Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, (a,b,c) um ponto de $\mathbb{R}^3$ interior a D_f e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ um vector não-nulo de $\mathbb{R}^3$. Se $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os cosenos directores do vector $\overrightarrow{v}$ então a derivada direcional $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b,c)$ pode ser calculada por

$$f'_{\overrightarrow{v}}(a,b,c) = \cos\alpha \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + \cos\beta \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + \cos\beta \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c).$$

N Quando $\overrightarrow{v}$ é um vector unitário então a derivada dirigida $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b,c)$ pode ser calculada por

$$f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = \cos\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + \cos\beta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + \cos\beta \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c).$$

1.3.5 Campo gradiente

Atenda ao Prezi do link `http://prezi.com/pg-gnc3nchif/?utm_campaign=share&utm_medium=copy&rc=ex0share`

1.3.6 Função composta

Sejam $\overrightarrow{F} : D_{\overrightarrow{F}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\overrightarrow{G} : D_{\overrightarrow{G}} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funções vectoriais tais que $\overrightarrow{F}\left(D_{\overrightarrow{F}}\right) \subset D_{\overrightarrow{G}}$ (portanto a função composta $\overrightarrow{G} \circ \overrightarrow{F}$ está bem definida) e $(a_1, \ldots, a_n)$ um ponto interior a $D_{\overrightarrow{F}}$.

Se $\overrightarrow{F}$ é diferenciável no ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ e $\overrightarrow{G}$ é diferenciável em $\overrightarrow{F}(a_1, \ldots, a_n) \in Int\left(\overrightarrow{F}\left(D_{\overrightarrow{F}}\right)\right)$ então a função composta $\overrightarrow{G} \circ \overrightarrow{F}$ também é diferenciável em $(a_1, \ldots, a_n)$ e é válida a regra da cadeia (ou regra da função composta) que se traduz pela seguinte igualdade entre matrizes Jacobianas

$$\underbrace{\nabla\left(\overrightarrow{G} \circ \overrightarrow{F}\right)(a_1, \ldots, a_n)}_{\text{matriz } p \times n} = \underbrace{\nabla\overrightarrow{G}\left(\overrightarrow{F}(a_1, \ldots, a_n)\right)}_{\text{matriz } p \times m} \cdot \underbrace{\nabla\overrightarrow{F}(a_1, \ldots, a_n)}_{\text{matriz} m \times n}.$$

N Se $\overrightarrow{F} : D_{\overrightarrow{F}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é uma função vetorial de variável real diferenciável em a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função real de duas variáveis reais diferenciável em $(b,c) = \overrightarrow{F}(a) = (F_1(a), F_2(a))$, então a função composta h definida por

$$h(t) = g(F_1(t), F_2(t)) \equiv g(u,v)$$

(representamos os argumentos $F_1(t)$ e $F_2(t)$ por u e v, respetivamente) é diferenciável em a e a sua derivada (total) é

$$\begin{aligned} h'(a) &= \frac{dh}{dt}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(b,c) & \frac{\partial g}{\partial v}(b,c) \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t}(a) \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial t}(a) \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(b,c) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial t}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b,c) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial t}(a) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(b,c) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b,c) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(a). \end{aligned}$$

N Se $\overrightarrow{F} : D_{\overrightarrow{F}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função vetorial de variável real diferenciável em (a,b) e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função real de duas variáveis reais diferenciável em $(c,d) = \overrightarrow{F}(a,b) = (F_1(a,b), F_2(a,b))$, então a função composta h definida por

$$h(x,y) = g(F_1(x,y), F_2(x,y)) \equiv g(u,v)$$

(representamos os argumentos $F_1(x,y)$ e $F_2(x,y)$ por u e v, respetivamente) é diferenciável em (a,b) e é válida a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

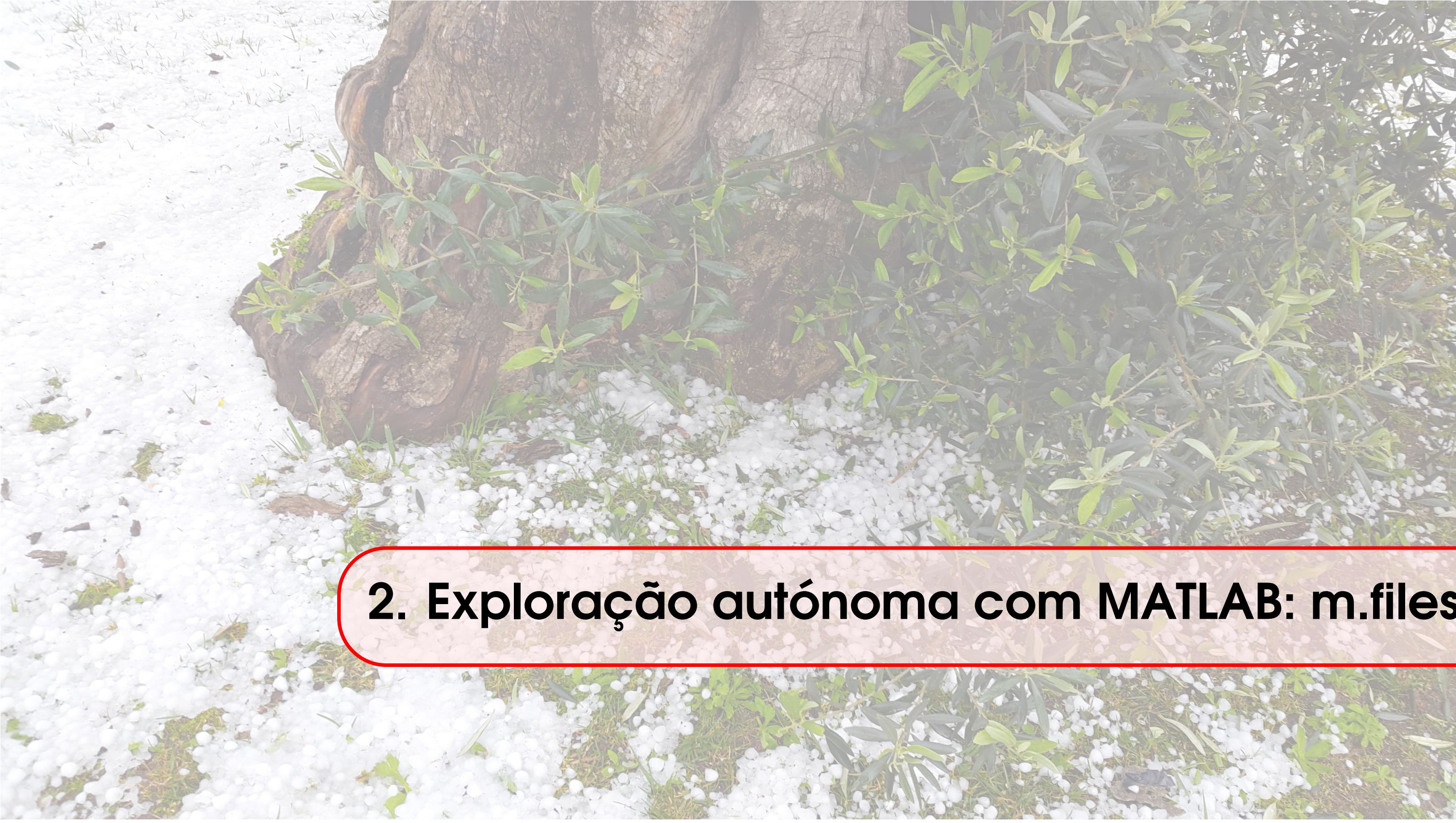
sendo as derivadas parciais da primeira e da terceira matrizes calculadas no ponto (a,b) e as da segunda matriz calculadas no ponto $(c,d) = \overrightarrow{F}(a,b) = (F_1(a,b), F_2(a,b))$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x}(a,b) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y}(a,b) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(a,b). \end{aligned}$$

Para cada função que resulte da composição de outras funções é conveniente a construção de um *esquema em "árvore"* que ilustre todas as dependências entre as funções envolvidas. A leitura desse esquema permite a aplicação correcta da regra da cadeia: consideramos a soma das contribuições relativas a cada caminho e em cada um destes o produto de derivadas.



2. Exploração autónoma com MATLAB: m.files

Foi escolhido o MATLAB como suporte informático ao estudo autónomo de alguns conteúdos do programa.

2.1 Breve apresentação

MATLAB - abreviatura de MATrix LABoratory – é um software com uma linguagem de programação intuitiva que acenta claramente na "forma de pensar em Matemática". Oferece um ambiente de desenvolvimento integrado (*IDE-integrated development environment*) e existe para as plataformas Unix, Windows e Apple Mac OS X.

Para além das suas principais potencialidades,

- cálculo numérico
- manipulação de matrizes
- representação de funções
- representação e manipulação de dados

permite também

- implementação de algoritmos como ficheiros .m ou ficheiros .mat
  - *.mat files* são ficheiros de dados que podem incluir um certo número de variáveis
  - *.m files*, que podem ser de tipo *functions* ou *scripts*, são ficheiros que executam determinadas rotinas
- criação de *interfaces* gráficas do utilizador (*GUI* - *graphical user interface*)
- comunicação/conexão com programas escritos noutras linguagens
- comunicação/conexão com alguns dispositivos de hardware.

Contém duas ferramentas que expandem as suas potencialidades:

- Simulink - plataforma de simulação para uso nos mais variados domínios
- GUIDE - interfaces gráficas do utilizador do Editor.

O uso do MATLAB pode contar ainda com diversas "caixas de ferramenta" - as Toolboxs - e blocos Simulink com pacotes (Blocksets).

Para os conteúdos desta UC é fundamental que a Symbolic Math Toolbox esteja disponível, para que o cálculo simbólico de derivação e integração se faça.

O ambiente de trabalho do MATLAB possui 4 janelas distintas:

- COMMAND WINDOW: é a mais importante por ser onde se executam os commandos do MATLAB. De salientar que
  - cada linha corresponde a uma instrução do utilizador
  - a presença do prompt » avisa o utilizador de que o programa está pronto para receber novas instruções
  - a colocação pelo utilizador de ; após uma instrução (ao final da linha da instrução) informa que não se pretende que o MATLAB exiba a resposta a essa instrução
  - tudo o que se seguir a um símbolo de percentagem não está activo como código (ex.: um comentário/explicação do utilizador, algo que se escreveu para ser usado noutra sessão)
- CURRENT DIRECTORY: exibe os ficheiros activos ou actuais que podem ser chamados à Command Window.
- WORKSPACE: exibe as variáveis resultantes dos últimos comandos executados na Command Window, o que permite ainda a sua utilização.
- EDITOR: está presente apenas quando se chama um ficheiro da Current Directory.

2.2 Escrita de *m.files* para representação gráfica

Os gráficos da Secção 1.2 foram obtidos com os códigos seguintes, escritos em *m.file* de tipo *Script*.

+49 | selPassosV0.m | solver_methods.m | Wolfe.m | descidaMaximaV0.m | Graf2Vamii.m*

```
[x,y]=meshgrid(-5:.25:5);         % função meshgrid pré-definida no MATLAB
                                  % VANTAGEM: adaptar os valores

z=x.^2+y.^2;                      % VANTAGEM: colocar a função pretendida

surf(x,y,z);                  % função surf pré-definida no MATLAB
xlabel('x-eixo');             % dar nome ao eixo dos xx
ylabel('y-eixo');
zlabel('z-eixo');
title('Gráfico da função f(x,y)=x^2+y^2');        % dar título à figura
```

Figure 2.1: *m.file* com o código que cria o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-5,5] \times [-5,5]$ (Figura 1.1)

2.3 Uso da Command Window para derivação

Algumas das derivadas parciais calculadas na Secção 1.3 podem ser obtidas na *Command Window* ou através de um *m.file* escrito *Editor* do MATLAB.

Seguem-se exemplos que lhe permitem explorar de forma autónoma o MATLAB.

+49 selPassosV0.m solver_methods.m Wolfe.m descidaMaximaV0.m Graf2Vamii.m*

```
[x,y]=meshgrid(-3:.25:7,-5:.25:5);         % função meshgrid pré-definida no MATLAB
                                           % VANTAGEM: adaptar os valores

z=(x-2).^2+y.^2;            % VANTAGEM: colocar a função pretendida

surf(x,y,z);                % função surf pré-definida no MATLAB
xlabel('x-eixo');           % dar nome ao eixo dos xx
ylabel('y-eixo');
zlabel('z-eixo');
title('Gráfico da função h(x,y)=(x-2)^2+y^2');          % dar título à figura
```

Figure 2.2: *m.file* com o código que cria o gráfico da função $h(x,y) = (x-3)^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-3,7] \times [-5,5]$ (Figura 1.3).

+50 solver_methods.m descidaMaximaV0.m Graf2Vamii.m Cnivelamii.m* +

```
[x,y] = meshgrid(-3:.2:3);     %grelha de pontos usados
z = 5+x.^2+y.^2;
contour(x,y,z,'ShowText','on') %representação das curvas de nível "etiquetadas"
title('Diagrama de curvas de nível da função f(x,y) = 5+x^2 + y^2')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Figure 2.3: *m.file* com o código que cria as curvas de nível da função $f(x,y) = 5 + x^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-3,3] \times [-3,3]$ (Figura 1.4)

+51 solver_methods.m Wolfe.m descidaMaximaV0.m Graf2Vamii.m +

```
[x,y]=meshgrid(-7:.25:7);          % função meshgrid pré-definida no MATLAB
                                            % VANTAGEM: adaptar os valores

z=5.*x.^2+y.^2;             % VANTAGEM: colocar a função pretendida

surf(x,y,z);                 % função surf pré-definida no MATLAB
xlabel('x-eixo');            % dar nome ao eixo dos xx
ylabel('y-eixo');
zlabel('z-eixo');
title('Gráfico da função f(x,y)=5x^2+y^2');          % dar título à figura
```

Figure 2.4: *m.file* com o código que cria o gráfico da função $f(x,y) = 5x^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-7,7] \times [-7,7]$ (Figura 1.7)

+49 selPassosV0.m solver_methods.m descidaMaximaV0.m Graf2Vamii.m Cnivelamii.m

```
[x,y] = meshgrid(-1:.2:1.5);   %grelha de pontos usados
z = 5.*x.^2+y.^2;
contour(x,y,z,'ShowText','on') %representação das curvas de nível "etiquetadas"
title('Diagrama de curvas de nível da função f(x,y) = 5x^2 + y^2')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Figure 2.5: *m.file* com o código que cria as curvas de nível da função $f(x,y) = 5x^2 + y^2$ restringida ao subconjunto $[-7,7] \times [-7,7]$ (Figura 1.6)

```
+32  Newton2015.m  descidaMaximaV3.m  Cnivel.m  circle.m  circuloamii.m  +

angulo= linspace(0,2*pi,360);   % define dos valores angulares (ângulos)

x=2*cos(angulo);      % cria as abcissas correspondentes aos ângulos tomados
y=2*sin(angulo);      % cria as ordenadas correspondentes aos ângulos tomados

plot(x,y)             % representa os pontos (x,y) obtidos

axis('equal')         % coloca a mesma escala no eixo dos xx e no eixo dos yy

title('Circunferência de centro (0,0) e raio 2')  % coloca um título na figura

ylabel('y-eixo')      % coloca uma etiqueta no eixo dos xx
xlabel('x-eixo')      % coloca uma etiqueta no eixo dos xx

grid on               % coloca uma grelha auxiliar
```

Figure 2.6: *m.file* com o código que cria a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 2, de equação $x^2+y^2=4$ (Figura 1.8)

Command window

%Definir as variáveis (como símbolos):

```
>> syms x
>> syms y
```

%Uso da função diff com indicação da função a derivar:

```
>> diff(y*sin(x))
```

%Não sendo indicada a var. de derivação, é assumido ser *x* ou ser *y*?

```
ans =

y*cos(x)
```

% assume *x* quando não é indicada outra variável

%Para obter a derivada parcial em ordem a outra variável há que indicá-la:

>> diff(y*sin(x),y)

ans =

sin(x)

%Se *x* não está presente na expressão da função, é assumida como variável?

>> diff(sin(y)) **% seria esperada a resposta 0**

ans =

cos(y) **% curiosamente y é assumida como a var. de derivação**

%As duas variáveis podem ser definidas em simultâneo:

>> syms x y
>> diff(y*exp(x))

%As duas variáveis podem ser definidas em simultâneo:

>> syms x y
>> diff(y*exp(x))

ans =

y*exp(x)

>> diff(y*exp(x),y)

ans =

exp(x)

```
>> syms x          % apenas x está a ser definida
>> diff(sin(x))    %seria esperada a resposta x*sin(y)

ans =

cos(x)


%Quando y não foi definida como símbolo e está presente na função, é
assumida como constante?

>> diff(y*sin(x))
Undefined function or variable 'y'.
```

EXEMPLO: $f(x, y) = x^2 y^3$ (variáveis x e y)

- Definir a função:

```
>>f=x^2*y^3
Undefined function or variable 'x'.
>> syms x          % x=símbolo
>> syms y
>> f=x^2*y^3

f =
x^2*y^3
```

Permite definir x e y como variáveis e exercer acções a nível abstracto / simbólico

- Derivada parcial de 1ª ordem na variável x:

```
>> diff(f)         % assume x como variável

ans =
2*x*y^3
```

% $\frac{\partial f}{\partial x}$

- Derivada parcial de 1ª ordem na variável y:

```
>> diff(f, y)

ans =
3*x^2*y^2
```

$\% \frac{\partial f}{\partial y}$

- Vector gradiente:

```
>> gradient(f)

ans =
   2*x*y^3
3*x^2*y^2
```

$\% \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

As derivada parciais também se obtêm com

```
>>  gradient(f, x)
```

e

```
>>  gradient(f, y)
```

EXEMPLO: $f(x,y) = x^2y^3$

- Obter o valor de f para $(x, y) = (2,3)$:

```
>> feval(f,2,3)
Error using feval
Argument must contain a string or function handle.
```

Limpamos as variáveis (e suas definições) do WorkSpace; x e y não estão como variáveis simbólicas

clear

Limpa WorkSpace

```
>> clear
>> f=@(x,y)x^2*y^3

f =
@(x,y)x^2*y^3

>> feval(f,2,3)

ans =
108
```

Definir a função anónima como *handle function* permite chamá--la para cálculos e incorporá-la em *m.files* e em aplicações

EXEMPLO: $f(x,y) = x^2y^3$

+27 | untitled5 | untitled6 | bisect17.m | repf1v.m | localNewt2.m | untitled9 | potencias.m

```
function [r]= potencias( x, y )
%UNTITLED10 Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here
r=x^2*y^3;

end
```

Para efeito de cálculo numérico a expressão da função não necessita dot (.)

- Obter o valor de f para $(x, y) = (2,3)$:

```
>> potencias(2,3)

ans =
108
```

```
>> t=potencias(2,3)

t =
 108

>> [t]=potencias(2,3)

t =
108
```

EXEMPLO: $f(x,y) = x^2y^3$

Editor (E)

+27 | untitled5 | untitled6 | bisect17.m | repf1v.m | localNewt2.m | untitled9 | potencias.m

```
function [r]= potencias( x, y )
%UNTITLED10 Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here
r=x^2*y^3;

end
```

Para efeito de cálculo numérico a expressão da função não necessita dot (.)

- Obter o valor de f para $(x,y) = (2,3)$:

```
>> potencias(2,3)

ans =
108
```

```
>> t=potencias(2,3)

t =
 108

>> [t]=potencias(2,3)

t =
108
```

Command Window (CW)

EXEMPLO: $f(x,y) = x^2y^3$

+22 | Contas17.m | For17.m | rosenbrock.m | bisect17.m | repf1v.m | localNewt2.m | potencias.m*

```
function [r]= potencias( x, y )
%UNTITLED10 Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here
syms x
syms y
r = x^2*y^3;
end
```

x e y apenas são variáveis simbólicas dentro do *m.file* "potencias"

- Vector gradiente:

```
>> gradient(potencias)

ans =
   2*x*y^3
3*x^2*y^2
```

- Matriz Hessiana:

```
>> hessian(potencias)

ans =
[    2*y^3, 6*x*y^2]
[ 6*x*y^2, 6*x^2*y]
```

```
>> diff(potencias)
ans =
2*x*y^3   ☺

>> diff(potencias,y)
Undefined function or variable 'y'.

>> diff(potencias, x)
Undefined function or variable 'x'.
```

EXEMPLO: $f(x,y) = x^2y^3$

```
+25  graf3.m*  produto.m  Contas17.m  For17.m  untitled  pro.m  ros
[x,y]=meshgrid(-5:.25:5);    % função meshgrid pré-definida no MATLAB
                             % VANTAGEM: adaptar os valores

z=x.^2.*y.^3;                   % VANTAGEM: colocar a função pretendida

surf(x,y,z);                 % função surf pré-definida no MATLAB
xlabel('x-eixo');            % dar nome ao eixo dos xx
ylabel('y');
zlabel('eixo dos zz');
title('gráfico tri-dimensional');    % dar título à figura
```

Run

ou (na CW):
>> run graf3

Usamos dot (.) na expressão da função quando está envolvido o cálculo com vectores
Experimente RUN sem usar dot (.)

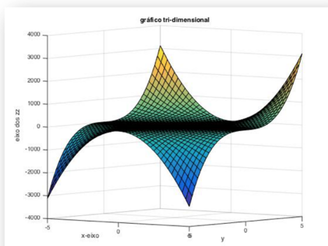
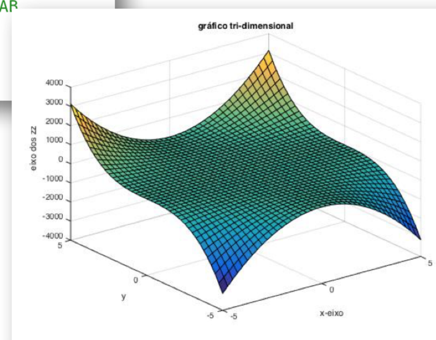


figura reposicionada

figura original

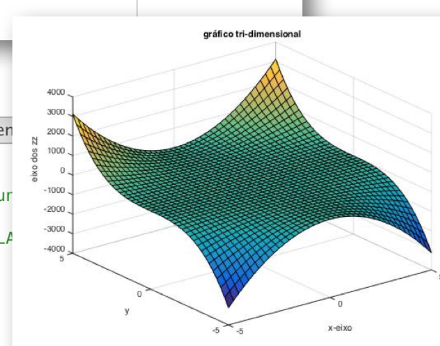


EXEMPLO: $f(x,y) = x^2y^3$

```
+27  untitled5  untitled6  bisect17.m  repf1v.m  localNewt2.m  untitled9  potencias.m
function [r]= potencias( x, y )
%UNTITLED10 Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here
r=x.^2.*y.^3;

end
```

“graf3” precisa de estar no mesmo “caminho”de “potencias”

```
+21  s1.m  graf3.m  produto.m  Contas17.m  For17.m  rosen
                             % VANTAGEM: adaptar os valores

z=potencias(x,y);                % VANTAGEM: colocar a fur

surf(x,y,z);                 % função surf pré-definida no MATLA
xlabel('x-eixo');            % dar nome ao eixo dos xx
ylabel('y');
zlabel('eixo dos zz');
title('gráfico tri-dimensional');    % dar título à figura

```

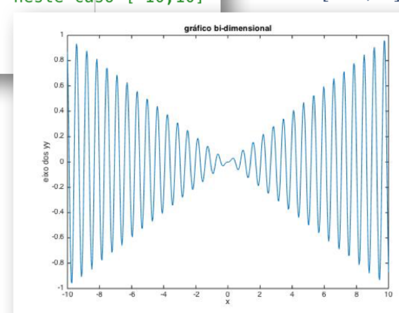


Uso da função **fplot** para obter o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{100}\sin(10x) - \frac{x}{10}\cos(10x)$:

+25 bisect17.m localNewt2.m potencias.m gH.m gH2.m gH3.m plot1v17.m*

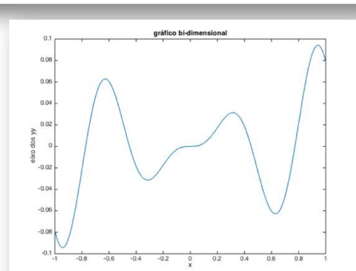
```
fmy=@(x)0.01*sin(10*x)-0.1*x*cos(10*x)  % escrita da função em estudo (escolha)

fplot(fmy,[-10,10])        % escolha do intervalo de visualização, neste caso [-10,10]
xlabel('x');
ylabel('eixo dos yy');
title('gráfico bi-dimensional');
```

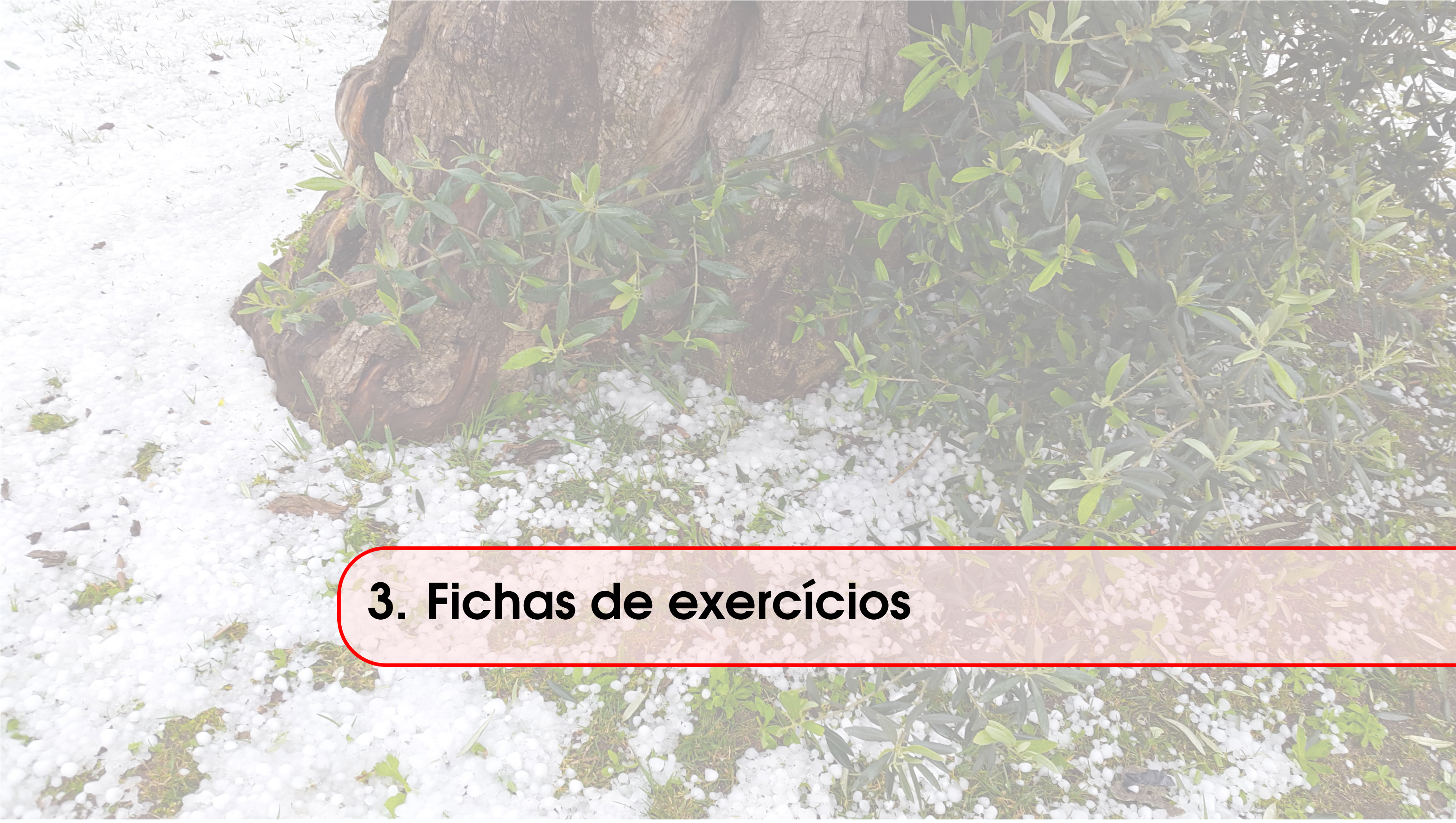
$x \in [-10,10]$



Suponhamos interesse em estudar os mínimos de f próximo da origem

$x \in [-1,1]$





3. Fichas de exercícios

Ao longo destas fichas encontra os exercícios que deve resolver em primeiro lugar para serem discutidos em aula. São ainda essenciais para o trabalho autónomo os exercícios adicionais da Secção 4.1 e as questões de resposta rápida da Secção 4.2.

3.1 Ficha 1

1. Determine e represente graficamente o domínio de definição D_f de cada uma das funções seguintes:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{3x}{y-2-3x}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{4-y^2} + \sqrt{x^2-4}$

   (d) $f(x,y) = \ln\left(1-x^2\right) + \cos(xy)$

2. Seja a função $f(x,y) = \dfrac{x+y}{6x-y^2}$. Calcule o limite de f no ponto $(1,2)$.

3. Estude a continuidade da função f definida por (ver slides de apoio)

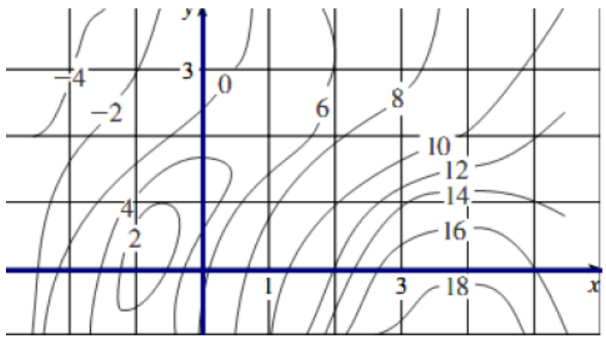
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Considere a função f definida por (ver slides de apoio)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Averigúe se a função f é contínua no ponto $(0,0)$.

5. **Estimativas.** Considere o diagrama de curvas de nível 5 relativo a uma função f.



   Com base neste diagrama, estime o valor das derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(2,1)$. Desenhe o vector $\overrightarrow{\nabla f}(2,1)$ das estimativas obtidas.

6. **Simulação para construção de chips.** A aná lise da temperatura (transferência de calor) de cada componente é fundamental para a construção de um chip de computador. Se um computador tende a aquecer, os engenheiros costumam colocar o chip numa zona fria da máquina. Frequentemente, a construção de chips é então auxiliada por simulação em computador, onde se analisam os gradientes de temperatura.
   Uma simulação para um novo chip resultou na tabela de temperaturas 6 (em graus Fahrenheit) :

6	62	62	65	63	61
5	62	67	69	65	64
4	63	70	70	69	67
3	65	66	72	74	76
2	61	67	73	80	75
1	60	60	71	76	72
0	60	60	63	65	69
mm	0	1	2	3	4

   Suponha que, para o correcto funcionamento de um chip, a temperatura de cada componente não deve exceder 78ºF.

(a) Seja $T(x,y)$ a temperatura nas coordenadas (x,y), possíveis de um chip. Utilize a simulação acima, com acréscimos de 1, para obter uma aproximação do gradiente de T em $(3,3)$, $\nabla T(3,3)$. Interprete o resultado.

(b) Estime a direção de transferência máxima de calor em $(3,3)$.

(c) Sabendo que T é função diferenciável em $(3,3)$, estime a taxa de varia-ção instantânea de T na direção de $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2$ em $(3,3)$.

7. **Problema da Formiga.** A temperatura T em cada ponto (x,y) de uma placa de zinco é, em graus Celsius,
$$T(x,y) = x^2 + 4y^2.$$

(a) Determine a equação da curva de nível (isotérmica) de T que passa no ponto $A(3,1)$. Escreva também a curva de contorno associada a essa curva de nível.

(b) Uma Formiga vagueia sobre a placa de zinco. Encontra-se no ponto $A(3,1)$ e caminha segundo a direção e sentido do x -eixo até ao ponto $(a,1)$ pertencente à curva de nível $z = 20$. Calcule a taxa média de variação da temperatura T sofrida pela Formiga. Considere o metro como unidade de distância.

(c) Calcule a taxa de variação instantânea da temperatura T sofrida pela Formiga quando caminha sobre a placa de zinco a partir do ponto A segundo a direção e sentido do x-eixo.

(d) Qual é a taxa de variação instantânea da temperatura T sofrida pela Formiga se caminhar sobre a placa de zinco a partir do mesmo ponto A segundo a direção e sentido do y-eixo.

(e) Suponha agora que a Formiga "queira" caminhar sobre a placa de zinco segundo a direção da reta $y = x/3$ a partir do ponto A. Calcule a taxa média de variação da temperatura T sofrida pela Formiga até à curva de nível $z = 52$?

(f) Calcule a taxa de variação instantânea da temperatura T sofrida pela Formiga se caminhar sobre a placa de zinco a partir do ponto A segundo a direção da reta $y = x/3$.

(g) Determine a direção $\overrightarrow{v}$ em que a Formiga se deve deslocar sobre a placa de zinco de modo a sofrer o aumento máximo de temperatura a partir do ponto $(3,1)$. Qual a taxa de variação instantânea máxima da temperatura T nesse ponto?

(h) Considere ainda que a Formiga reinicia novo caminho sobre a placa de zinco tal que, após t segundos, a sua posição é dada por $x(t) = 4t + 3$ e $y(t) = t^2 - 10$. Determine em que ponto da placa se encontra a Formiga após 5 segundos e calcule a taxa de variação intantânea da temperatura T, em relação ao tempo, sofrida pela Formiga aos 5 segundos.

8. Considere a função f definida por
$$f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$
Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \dfrac{6}{25}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{8}{25}$.

9. Dada a função
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases},$$
Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=+\infty$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=+\infty$.

10. Mostre que 0 é o valor da derivada parcial de 1ª ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ da função
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+3y^4}{2x^3-y^3} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

11. Calcule a expressão geral das derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções:
    (a) $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{xy}$
    (b) $f(x,y)=\sqrt{\exp\left(x-5y^2\right)-y^2}$
    (c) $f(x,y)=\ln\sin\dfrac{x+\alpha}{\sqrt{y}}$

12. Dada a função definida por $z(x,y)=xy\tan\dfrac{y}{x}$, mostre que
$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=2z(x,y).$$

13. Determine a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sendo f definida por
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

14. Determine a matriz Jacobiana e, sempre que possível, o Jacobiano das seguintes funções:
    (a) $f(x,y)=\left(x^2+2y^3,4x+y^2\right)$
    (b) $f(x,y)=(xy,2x,-y)$
    (c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que
    $$x=\rho\cos\theta \quad \text{e} \quad y=\rho\sin\theta$$
    Nota: ρ e θ dizem-se as coordenadas polares;
    (d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(\rho,\theta,z)=(x,y,z)$ em que
    $$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$
    Nota: ρ, θ e z dizem-se as coordenadas cilíndricas.

3.1.1 Soluções da Ficha 1

1. (a) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 2+3x\right\}$

1. (b) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\right\}$

1. (c) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leq -2 \ \wedge \ -2 \leq y \leq 2)\right\}$
$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2 \ \wedge \ -2 \leq y \leq 2\right\}$

1. (d) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\right\}$

2. $3/2$

3. É contínua

4. Não é contínua em $(0,0)$

11. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{3x^4+y^4}{x^2y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x^4+3y^4}{xy^2}$

11. (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\exp(x-5y^2)}{2\sqrt{\exp(x-5y^2)-y^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{5\left[\exp(x-5y^2)+1\right]y}{\sqrt{\exp(x-5y^2)-y^2}}$

11. (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\cot\dfrac{x+\alpha}{\sqrt{y}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x+\alpha}{2y\sqrt{y}}\cot\dfrac{x+\alpha}{\sqrt{y}}$

13. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6-x^2y^2}{(x^4+y^2)^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

14. (a) $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 6y^2 \\ 4 & 2y \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $\mid \nabla f(x,y) \mid = 4xy-24y^2$

14. (b) $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

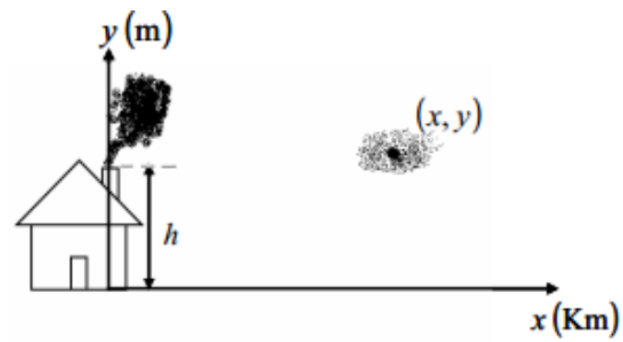
14. (c) $\nabla f(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $\mid \nabla f(\rho,\theta) \mid = \rho$

14. (d) $\nabla f(\rho,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $\mid \nabla f(\rho,\theta,z) \mid = \rho$

3.2 Ficha 2

1. **Problema do Alpinista.** A superfície de uma montanha tem forma semelhante à do parabolóide elítico de equação
$$9x^2+4y^2+z=36.$$
Suponha que um Alpinista se encontra no ponto $M(1,2,11)$ da superfície da montanha.
   (a) Que direção deve tomar o Alpinista de modo a subir pela parte mais íngreme?
   (b) Se a partir do ponto M o Alpinista se mover na direção do vector $\overrightarrow{u}=(4,-3)$, está a subir ou a descer a montanha? Qual a taxa (instantânea) de variação da altura nesse ponto segundo a direção do vector $\overrightarrow{u}$?
   (c) Em que direção se deve mover o Alpinista, a partir do ponto M, se não pretender mudar de altitude (nem subir nem descer)?

2. **Poluição por óxido nítrico.** Quando um poluente, tal como o óxido nítri-co, é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração $C(x,y)$ do poluente, em $\mu g/m^3$, num ponto (x,y) a x kiló metros da chaminé e à altura y metros do chão (conforme mostra a Figura 2) pode ser modelado por
$$C(x,y)=\frac{a}{x^2}\left[\exp\left(-b\frac{(y-h)^2}{x^2}\right)+\exp\left(-b\frac{(y+h)^2}{x^2}\right)\right],$$
em que a e b são parâmetros positivos que dependem das condições climatéricas do local e da taxa de emissão do poluente.



Considerando $a=200$, $b=0.02$ e $h=10$, calcule $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial C}{\partial y}$ no ponto $(2,5)$. Interprete os resultados.

3. Considere a função
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
Mostre que f tem derivada segundo qualquer vector no ponto $(0,0)$, mas não é contínua nesse ponto.

4. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Mostre que f admite derivada segundo qualquer vector no ponto $(0,0)$, mas não é válida, em geral, a igualdade

$$f'_{\vec{u}+\vec{v}}(0,0)=f'_{\vec{u}}(0,0)+f'_{\vec{v}}(0,0).$$

5. Mostre que se existe a derivada direccional $f'_{\vec{u}}(a,b)$ então também existe $f'_{\lambda\cdot\vec{u}}(a,b)$, para qualquer $\lambda\in\mathbb{R}$.

6. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(a) Determine as derivadas parciais de 1ª ordem de f na origem e defina ainda as derivadas parciais de 1ª ordem da função f.

(b) Estude a diferenciabilidade de f na origem.

7. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y^5+x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Estude a continuidade e a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

8. Seja f a função definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y-1} & , \quad y\neq1\\ 0 & , \quad y=1\end{cases}.$$

Mostre que a função f não é diferenciável no ponto $(2,1)$.

9. Obtenha o valor do diferencial de 1ª ordem no ponto indicado e interprete o resultado.

(a) $f(x,y)=y^2\ln\dfrac{x}{y}$ para $a=b=2$, $dx=0.4$ e $dy=-0.3$,

(b) $z=x^2+y^2-2x+4y$ para $a=3$, $b=1$, $dx=0.1$ e $dy=-0.2$.

10. Seja f a função $f(x,y)=\sqrt[5]{x+\ln y}$. Calcule um valor aproximado de $f(32.1,1.2)$.

11. Calcule os diferenciais de 1ª ordem das seguintes funções:
    (a) $f = xy\exp(x-2y)$
    (b) $g = \sin^2 x + \cos^2 y$

12. Considere as funções f e g do exercício anterior.
    (a) Determine $P(x,y)$ de grau 1 tal que $f(x,y) \approx P(x,y)$ em torno do ponto $(2,1)$;
    (b) Determine a equação do plano tangente à superfície do gráfico de g no ponto $(0,\pi/4)$.

13. Seja f uma função diferenciável no ponto $(-1,5)$ tal que $f(-1,5) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,5) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,5) = -2$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1,5)$, caso exista esse plano.

14. Dada a função f definida por $f(x,y) = \sin(xy) + xy^2$, calcule a derivada direccional de f no ponto $(0,0)$ segundo a direcção do vector $\overrightarrow{v} = (1,2)$.

15. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

    Calcule a derivada direccional de f no ponto $(0,0)$ segundo a direcção do vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, com $a \neq 0$.

16. Calcule a derivada dirigida da função $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ no ponto $P(2,1)$ segundo a direcção da recta que une o ponto P ao ponto $Q(5,5)$.

17. Dada a função $f(x,y) = \exp(x) + \exp(y)$, calcule a derivada dirigida de f no ponto $(1,0)$ na direcção em que é máxima.

18. Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x\sin^2(y) + xy^2$. Indique, justificando, em que direcção $\overrightarrow{v}$ é que a derivada dirigida da função é dada pela expressão

$$f'_{\overrightarrow{u}}(x,y) = \sin^2(y) + y^2.$$

19. Use a regra da cadeia para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sendo

$$f = \left(x^2+y^2\right)\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}},$$

    considerando um argumento $u = u(x,y)$ conveniente.

20. Considere a função composta

$$f(x,y) = \tan\left(x^2+y^2\right)$$

em que $x = t^2 - 3t$ e $y = \ln t$. Determine a expressão da derivada (total) $f'(t)$.

21. Demonstre que para a função $z = yf\left(x^2-y^2\right)$ é válida a igualdade

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{z(x,y)}{y^2}.$$

3.2.1 Soluções da Ficha 2

6. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$

Quanto à expressão geral das derivadas parciais de 1ª ordem,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4+6x^2y^2+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^2x^2-y^4-4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. (b) f não é diferenciável em $(0,0)$

7 f é descontínua em $(0,0)$ logo não é diferenciável nesse ponto

9.(a) $df(2,2) = 1.4$

9. (b) $dz(3,1) = -0.8$

10. $f(32.1, 1.2) \simeq 2.00375$

11. (a) $dz(x,y) = \exp(x-2y)\left[y(1+x)\,dx + x(1-2y)\,dy\right]$

11. (b) $dz(x,y) = \sin(2x)\,dx - \sin(2y)\,dy$

12. (a) $3x-2y-2$

12. (b) $z = \dfrac{2-\pi}{4} - y$

13. $z-3x+2y-15 = 0$

14. $f'_{(1,2)}(0,0) = 0$

15. $f'_{(a,b)}(0,0) = \dfrac{v_2^2}{v_1}$

16. Trata-se de $f'_{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}(2,1)$, segundo o versor do vector $(3,4)$, e tem valor $\dfrac{47}{5}$

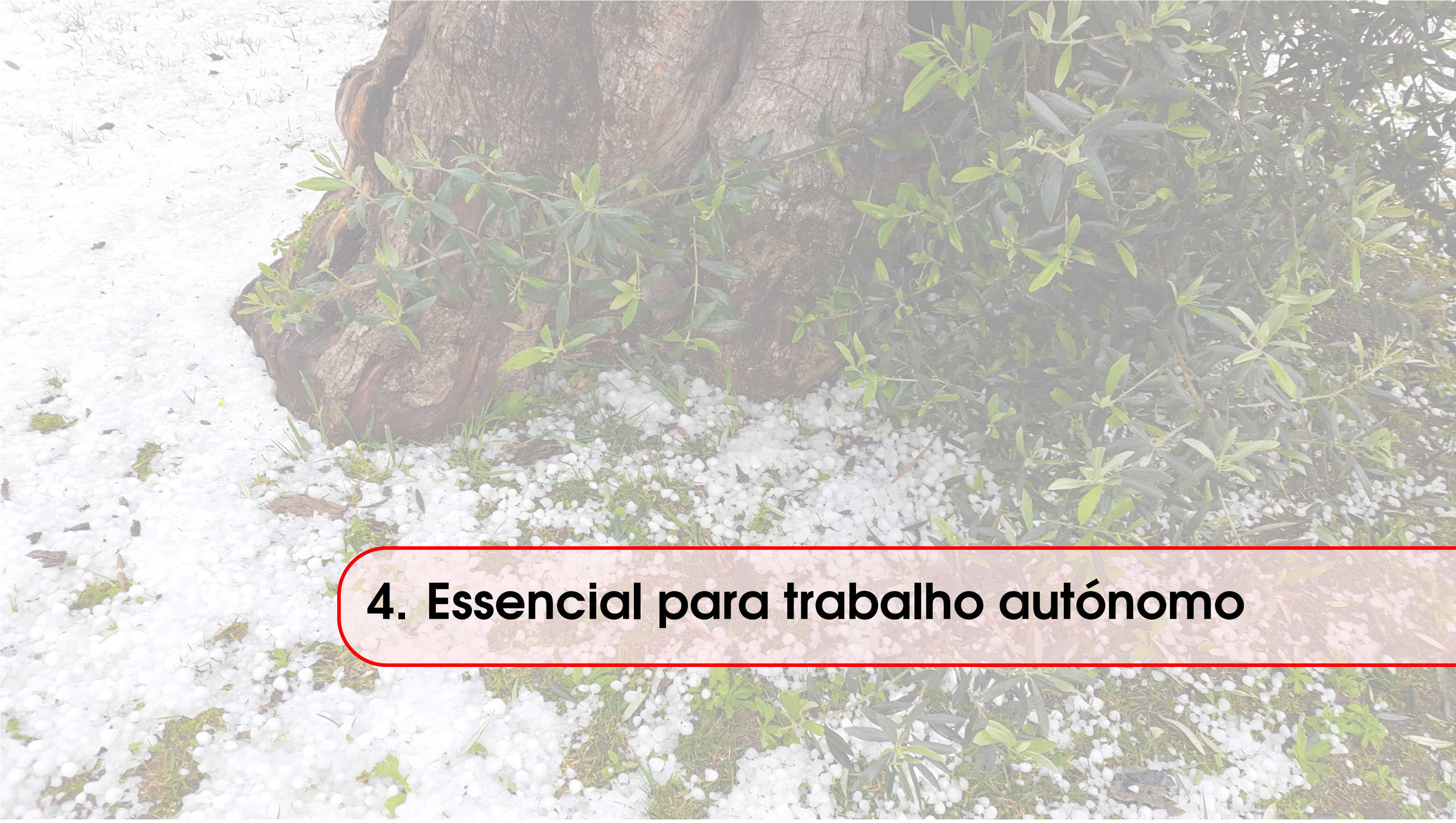
17. A derivada é máxima na direcção e sentido do vector gradiente e tem o valor $\sqrt{e^2+1}$

18. Na direcção do vector $\overrightarrow{v} = (1,0)$

19. Tomando $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\dfrac{2u^2+2u-2}{(1+u)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\dfrac{2u^2+2u-2}{(1+u)^2}$

20. $f'(t) = 2\left[1+tg^2\left(x^2+y^2\right)\right]\left[x(2t-3)+\dfrac{y}{t}\right]$

21. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xyf'\left(x^2-y^2\right)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f\left(x^2-y^2\right) - 2y^2 f'(x^2-y^2)$, que verificam a igualdade requerida



4. Essencial para trabalho autónomo

As propostas seguintes destinam-se essencialmente a trabalho autónomo.

4.1 Exercícios adicionais

1. Determine e represente graficamente o domínio de definição D_f de cada uma das funções seguintes:
   (a) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$
   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$
   (c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-(x+1)^2-y^2}}{\sqrt[4]{y-x^2}}$
   (d) $f(x,y) = 1+\sqrt{-(x-y)^2}$
   (e) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x}$
   (f) $f(x,y) = \left(4-x^2-y^2\right)^{xy}$
2. Considere a função vetorial $\overrightarrow{F} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\overrightarrow{F}(x,y) \equiv \begin{cases} F_1(x,y) = y+\sqrt{x-x^2} \\ \\ F_2(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy-1}} \end{cases}.$$

   Determine o domínio de definição de $\overrightarrow{F}$ e represente-o graficamente.

3. Determine e represente graficamente o domínio de definição da função função

$$f(x,y) = \ln(xy-1) + \sqrt{9-(x-1)^2-y^2}.$$

4. Verifique se é contínua na origem a função f definida por (ver slides de apoio)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{3(x^2+y^2)} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

5. Verifique se a função (ver slides de apoio)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } x \neq \pm y \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } x = \pm y \end{cases}$$

tem limite no ponto $(x,y) = (0,0)$.

6. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Existe algum valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é contínua? Justifique.

7. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2 < 1 \text{ e } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Estude a continuidade da função f na origem.

8. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Estude a continuidade da função f na origem.

9. Determine o domínio de definição D_f da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(y-x^2) & \text{se } \|(x,y)\| \geq 2 \\ \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } \|(x,y)\| < 2 \end{cases}.$$

10. Estude a existência de limite nos pontos $(a,0)$ do eixo dos xx, com abcissa $a>0$, da função f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } xy<0\\[2ex] \ln(xy+1) & \text{se } xy\geq 0\end{cases}.$$

Conclua acerca da continuidade de f nesses pontos.

11. Estude a existência de limite no ponto $(0,0)$ da função f definida por

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

12. Seja

$$f(x,y)=\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}.$$

(a) Averigue a existência de limite nos pontos (a,b) onde tal faça sentido;

(b) A função f é contínua? Justifique.

13. Dada a função real f definida por

$$f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}},$$

calcule, por definição, o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(2,1)$.

14. Dada a função real f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

calcule o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ na origem.

15. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2-y^2} & , \quad x\neq\pm y\\[2ex] 4 & , \quad x=\pm y\end{cases}.$$

Calcule o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,-2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,-2)$.

16. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(xy) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Defina as funções derivadas parciais de 1ª ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

17. Dada a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin(y) + y^2 \sin x}{x^2 + y} & \text{se } y \neq -x^2 \\ 1 & \text{se } y = -x^2 \end{cases},$$

determine o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

18. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^3 + y^3\right)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, e estude a diferenciabilidade da função f em $(0,0)$.

19. Considere a função real $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e estude a diferenciabilidade da função f na origem.

20. Seja f a função real definida por $f(x,y) = x^2 y - 3y$.
    (a) Determine a expressão geral do diferencial de f.
    (b) Calcule no ponto $(4,3)$ o acréscimo Δf e o diferencial df, para os acréscimos -0.01 e 0.02 das variáveis x e y, respetivamente.
    (c) Determine um valor aproximado da imagem $f(1.03, 1.99)$ sem aplicar directamente neste ponto a expressão que define a função f.

21. Calcule os diferenciais de 1ª ordem das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = x\sin(ax) - y\cos(by)$

(b) $z = \ln\tan\dfrac{y}{x}$

22. Considere a função f definida por
$$f(x,y) = \sin(xy) + xy^2 + 3x.$$
Determine a derivada direcional de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $\overrightarrow{v} = (1,-1)$ e calcule a derivada dirigida no mesmo ponto segundo a mesma direção e sentido.

23. Considere a função f definida por
$$f(x,y) = xy\sin\frac{x}{y}.$$
Determine o vector gradiente de f no ponto $(0,1)$ e calcule a derivada dirigida de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

24. Determinar a derivada dirigida da função $f(x,y) = y\exp x$ no ponto $(0,3)$ na direção que faz um ângulo de 120° com a parte positiva do eixo dos xx.

25. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = y\sin^2(x) + x^2 y.$$
Determine o vector $\overrightarrow{v}$ para o qual a derivada dirigida de f é dada pela expressão
$$f'_{\overrightarrow{v}}(x,y) = \sin^2(x) + x^2$$
e verifique que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin^2(x) + x^2$ é de classe C^{∞} com
$$\frac{d^5 g}{dx^5}(x) = g^{(5)}(x) = 16\sin(2x).$$

26. Calcular a derivada dirigida da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ nos pontos (x,y) da semi-reta $y = x$, com $x > 0$ e $y > 0$, e segundo a direcção desta semi-recta.

27. Considere $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + cy^2$, com $x = uv$, $y = \ln(u) - \sqrt{v}$, $u = s^2$ e $v = s+1$. Obtenha a derivada $f'(s)$.

4.1.1 Soluções

1. (a) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

   (b) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

   (c) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y > x^2\right\}$

   (d) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\right\}$

(e) $D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x \le y \le x \ \wedge\ x>0\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \le y \le -x \ \wedge\ x<0\right\}$
(f) $D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\right\}$

2. $D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\,]0,1] \ \wedge\ y>\dfrac{1}{x}\right\}$
3. $D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>\dfrac{1}{x} \ \wedge\ (x-1)^2+y^2\le 9 \ \wedge\ x\neq 0\right\}$
4. É contínua em $(0,0)$
5. Não tem limite em $(0,0)$
6. É contínua se $\alpha = 0$
7. É contínua em $(0,0)$
8. É descontínua em $(0,0)$
9. $D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x^2 \ \wedge\ x^2+y^2\ge 4\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x^2+y^2\le 1\right\}$
10. Existe em todos os pontos $(a,0)$, com $a>0$, e tem valor 0. É contínua nesses pontos
11. Não tem limite em $(0,0)$
12. (a) existe limite com valor $\dfrac{\sin\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2}$ nos pontos $(a,b)\neq(0,0)$
    (b) Sim, por que é contínua em todos os pontos do seu domínio
13. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 0$
14. Ambas as derivadas parciais são nulas
15. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,-2) = -\infty$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,-2) = +\infty$
16. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\exp(xy)$, para $(x,y)\neq(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\exp(xy)$, para $(x,y)\neq(0,0)$
17. As derivadas parciais não existem em $(0,0)$ logo f não é diferenciável em $(0,0)$
18. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\infty$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$ e f não é diferenciável em $(0,0)$
19. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e f não é diferenciável em $(0,0)$
20. (a) $df(x,y) = 2xy\,dx + \left(x^2-3\right)dy$
    (b) $\Delta f(4,3) = 0.018702$ e $df(4,3) = 0.02$
    (c) $f(1.03, 1.99) = f(1,2) + df(1,2) = -3.86$
21. (a) $df(x,y) = (\sin(ax) + ax\cos(ax))\,dx + (-\cos(by) + by\sin(by))\,dy$
    (b) $dz(x,y) = \dfrac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x\tan\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x}dx + dy\right)$
22. $f'_{(1,-1)}(0,0) = 3$ e $f'_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(0,0) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

23. $\overrightarrow{grad} f(0,1) = (0,0)$ e $f'_{\overrightarrow{v}}(0,1) = 0$

24. $\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$

25. Na direcção do vector $\overrightarrow{v} = (0,1)$; é de classe C^∞ porque $g'(x) = \sin(2x) + 2x$ e a função trigonométrica $\sin(2x)$ tem derivadas contínuas de todas as ordens

26. $2\sqrt{2x}$

27. $(2Ax+2By)(2vs+u) + (2Bx+2Cy)\left(\frac{2s}{u} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\right)$

4.1.2 Algumas resoluções

1. (c) Temos

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4-(x+1)^2 - y^2 \geq 0 \wedge \sqrt[4]{y-x^2} \neq 0 \wedge y - x^2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ y - x^2 \neq 0 \ \wedge \ y - x^2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge y > x^2\right\}. \end{aligned}$$

A condição $(x+1)^2 + y^2 \leq 4$ define o círculo de centro $(-1,0)$ e raio 2, enquanto $y > x^2$ define a região do plano acima da parábola de equação $y = x^2$ sem que a curva da parábola esteja incluída. Esta parábola tem concavidade virada para cima e vértice em $(0,0)$.

O domínio de f é a intersecção do círculo com a região acima da referida parábola.

2. As funções componentes de $\overrightarrow{F}$ são

$$F_1(x,y) = y + \sqrt{x-x^2} \quad \text{e} \quad F_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy-1}}.$$

O domínio de $\overrightarrow{F}$ é a intersecção dos domínios das suas funções componentes,

$$D_{\overrightarrow{F}} = D_{F_1} \cap D_{F_2}.$$

Temos

$$D_{F_1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - x^2 \geq 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(1-x) \geq 0\right\}$$

e

$$\begin{aligned} D_{F_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{xy-1} \neq 0 \ \wedge \ xy - 1 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy-1 \neq 0 \ \wedge \ xy - 1 \geq 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\right\}. \end{aligned}$$

A parábola $y = x(1-x)$ tem concavidade virada para baixo e zeros em 0 e 1. Como tal, a condição $x(1-x) \geq 0$ é verdadeira sempre que $x \in [0,1]$ e $y \in \mathbb{R}$. Logo

$$D_{F_1} = [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Podemos então considerar que $x \geq 0$. A condição $xy > 1$ relativa a D_{F_2} é, nesse caso, equivalente a $y > 1/x$, sempre que $x \neq 0$. Se $x = 0$ então obtemos (a partir de $xy > 1$) a proposição falsa $0 > 1$, para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Concluímos finalmente que

$$D_{\vec{F}} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0,1] \ \wedge \ y > \frac{1}{x} \right\}.$$

6. A função f está definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$. A função f é contínua em qualquer ponto $(a,b) \neq (0,0)$ por ser o quociente de funções contínuas (funções polinomiais), independentemente do valor de α.
A função f é contínua no ponto $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \alpha,$$

visto que $f(0,0) = \alpha$. A substituição de x e de y por 0 no limite conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$.
Procedemos então ao estudo dos limites relativos:
Sobre a recta $x = 0$ obtemos

$$\lim_{y\to 0} \frac{-y^3}{y^2} = \lim_{x\to 0} (-y) = 0.$$

Sobre rectas $y = mx$ que passam no ponto $(0,0)$ também obtemos 0 qualquer que seja m:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - m^3x^3}{x^2 + m^2x^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(2 - m^3\right)}{x^2\left(1 + m^2\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2 - m^3\right)}{1 + m^2} = \frac{0 \cdot \left(2 - m^3\right)}{1 + m^2} = 0. \end{aligned}$$

Se tentarmos aproximação ao ponto $(0,0)$ por parábolas verticais $y = kx^2$ com $k \neq 0$, continuamos a obter 0 como resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0, y=kx^2} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - k^3x^6}{x^2 + k^2x^4} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(2 - k^3x^3\right)}{x^2\left(1 + k^2x^2\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2 - k^3x^3\right)}{1 + k^2x^2} = \frac{0 \cdot (2 - 0)}{1 + 0} = 0. \end{aligned}$$

Dado que todos os limites relativos estudados conduzem ao mesmo valor 0, há que analisar pela definição se 0 corresponde, de facto, ao valor do limite em estudo. Temos

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{\left|2x^3 - y^3\right|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left|2x^3\right| + \left|-y^3\right|}{x^2 + y^2} = \frac{\left|2x^3\right| + |-1| \cdot \left|y^3\right|}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{\left|2x^3\right| + \left|y^3\right|}{x^2 + y^2} = \frac{2|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{2\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{3\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}{x^2 + y^2} = \frac{3\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Está então garantido que

$$|f(x,y)-0|<\delta$$

sempre que $3\varepsilon \leq \delta$, ou seja, sempre que $\varepsilon \leq \delta/3$. A relação $\varepsilon \leq \delta/3$ mostra que a diminuição do δ tomado implica a diminuição do respectivo valor de $\varepsilon=\varepsilon(\delta)=\delta/3$. Assim, concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

Dado que $f(0,0)=\alpha$, a função f é contínua em $(0,0)$ se $\alpha=0$. Portanto, para $\alpha=0$ a função f é contínua (ou seja, é contínua em todo o seu domínio).

7. Notemos que $(0,0)$ é ponto de acumulação de D_f pois

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\right\},$$

ou seja, os pontos do interior do círculo de centro $(0,0)$ e raio 1. Temos $f(0,0)=0$ e há que verificar se também

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

A substituição de x e de y por 0 conduz a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0, y\to 0}\frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}=\frac{0}{-\infty}=0,$$

pelo que 0 é o valor do limite da função f no ponto $(0,0)$. Logo, f é contínua em $(0,0)$ pois também $f(0,0)=0$.

8. Notemos que $(0,0)\in D_f=\mathbb{R}^2$. Temos $f(0,0)=2$. Quanto ao limite de f no ponto $(0,0)$, a substituição de x e de y por 0 conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$. Procedemos então ao estudo dos limites relativos. Sobre a recta $y=0$ temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot x\right)=1\cdot 0=0.$$

Portanto, caso o limite exista, ele terá valor $0\neq 2=f(0,0)$. Tal permite concluir de imediato que a função não é contínua na origem.

9. Temos $D_f=D_1\cup D_2$ sendo D_i definido pelo i-ésimo ramo de definição. Portanto,

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-x^2>0 \ \wedge\ \|(x,y)\|\geq 2\right\}$$

e

$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-x^2-y^2\geq 0 \ \wedge\ \|(x,y)\|<2\right\}.$$

Considerando a norma euclidiana, $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$, obtemos

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x^2 \ \wedge\ \sqrt{x^2+y^2}\geq 2\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x^2 \ \wedge\ x^2+y^2\geq 4\right\}$$

e

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2-y^2 \geq -1 \ \wedge\ \sqrt{x^2+y^2} < 2\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \ \wedge\ 0 \leq x^2+y^2 < 4\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Como tal, $D_f = D_1 \cup D_2$, ou seja

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 \ \wedge\ x^2+y^2 \geq 4\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\right\},$$

em que D_1 é a região acima da parábola $y = x^2$, sem a incluir, que está na circunferência de centro $(0,0)$ e raio 2 e no seu exterior, enquanto D_2 é o círculo de centro $(0,0)$ e raio 1.

10. Os pontos do eixo dos xx com abcissa positiva são pontos de acumulação do domínio de f, pois $D_f = \mathbb{R}^2$. Consideremos pontos $(x,y) \to (a,0)$, com $a > 0$. Estes pontos (x,y) estão no 1º ou no 4º quadrantes. Então, dada a forma como a função f está definida - podemos fazer um esquema com a expressão válida em cada um dos quadrantes que nos ajuda a clarificar o exercício - é necessário calcular os limites

$$[1^{\text{o}}\text{Q}] \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ y>0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \ln(xy+1) = \ln(a\cdot 0+1) = 0,$$

e

$$[4^{\text{o}}\text{Q}] \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ y<0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{a^2\cdot 0}{a^2+0^2} = \frac{0}{a^2} = 0.$$

Como foram obtidos valores iguais (note que não estamos a calcular limites relativos), concluímos que o limite de f nos pontos $(a,0)$, com $a > 0$, existe e tem valor 0. Quanto à coninuidade, os pontos da forma $(a,0)$, com $a > 0$, têm imagem nula,

$$f(a,0) = \ln(a\cdot 0+1) = \ln 1 = 0.$$

Como também é nulo o limite de f nesses pontos, f é contínua nesses pontos.

11. Notemos que $(0,0) \notin D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mas $(0,0)$ é ponto de acumulação do domínio de f. Como tal, podemos averiguar a existência de limite em $(0,0)$. A substituição de x e y por 0 conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$. Procedemos então ao estudo dos limites relativos. Temos então

$$\lim_{x\to 0, x=0} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2\sqrt{y^2}} = \lim_{y\to 0} 0 = {\color{red}0}$$

logo, caso exista o limite em estudo, ele terá valor 0).
Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0, y=mx} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{(x^2+m^2x^2)\sqrt{x^2+m^2x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{m}{(1+m^2)\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \frac{m}{(1+m^2)\cdot 0^+} = \infty
\end{aligned}
$$

sempre que $m \neq 0$. Obtemos $+\infty \neq 0$ se $m > 0$ e $-\infty \neq 0$ se $m < 0$, logo concluímos que não existe o limite em estudo (além de que não existe este último limite ao longo das rectas $y = mx$).

N Notemos que o uso da definição com base no valor 0 "candidato" a limite, mostra evidentemente que esse valor não corresponde ao limite em estudo. De facto, temos

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left| \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{|x| \cdot |y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

e a aplicação da hipótese $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ apenas permite concluir que

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Verificamos que a sequência de igualdades e majorações (desigualdades $<$ ou $\leq$) é "quebrada" no final, não sendo possível obter

$$|f(x,y) - 0| < \delta$$

conforme o necessário para concluir existência de limite.

12. (a) O domínio de f é $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. A função f tem limite em qualquer ponto $(a,b) \neq (0,0)$ dado pelo número real

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \frac{\sin\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}.$$

É ainda possível estudar a existência de limite no ponto $(a,b) = (0,0)$ visto $(0,0)$ ser um ponto de acumulação do domínio da função. Atendendo ao limite de referência

$$\lim_{A\to 0} \frac{sinA}{A} = 1,$$

temos, para $A = x^2 + y^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1.$$

A função f tem limite igual a 1 no ponto $(0,0)$. Concluímos assim que a função f tem limite em todos os pontos do plano $\mathbb{R}^2$.

12. (b) A função f é contínua em qualquer ponto $(a,b) \neq (0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \frac{\sin\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2} = f(a,b).$$

Como tal, f é contínua em todos os pontos do seu domínio, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e diz-se então uma função contínua.

13. O domínio de f é

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0 \ \wedge\ xy+\frac{x}{y}>0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0 \ \wedge\ \frac{xy^2+x}{y}>0\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0 \ \wedge\ \frac{x\left(y^2+1\right)}{y}>0\right\}. \end{aligned}$$

Como $y^2+1>0$, fazem parte do domínio os pontos dos 1º e 3º quadrantes, onde x e y têm o mesmo sinal. Assim,

$$D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x>0 \ \wedge\ y>0\,) \vee\ (x<0 \ \wedge\ y<0)\right\}.$$

O ponto $(2,1)$ é interior a D_f e tem imagem $f(2,1)=\sqrt{2+2}=2$. A derivada parcial de 1ª ordem de f na variável x é

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h+\dfrac{2+h}{1}}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+2h}-2}{h}\ \left(\frac{0}{0}\right).$$

Aplicando o produto pelo conjugado de $\sqrt{4+2h}-2$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+2h}-2\right)\left(\sqrt{4+2h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+2h}+2\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+2h}\right)^2-2^2}{h\left(\sqrt{4+2h}+2\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{4+2h-4}{h\left(\sqrt{4+2h}+2\right)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{4+2h}+2\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{4+2h}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A derivada parcial de 1ª ordem de f na variável y é

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(1+h)+\dfrac{2}{1+h}}-2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{2(1+h)^2+2}{1+h}}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{2+2h^2+4h+2}{1+h}}-2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{4+2h^2+4h}}{\sqrt{1+h}}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+2h^2+4h}-2\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}} \end{aligned}$$

Também por aplicação de produto pelo conjugado de $\sqrt{4+2h^2+4h}-2\sqrt{1+h}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+2h^2+4h}-2\sqrt{1+h}\right)\left(\sqrt{4+2h^2+4h}+2\sqrt{1+h}\right)}{h\sqrt{1+h}\left(\sqrt{4+2h^2+4h}+2\sqrt{1+h}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+2h^2+4h}\right)^2-\left(2\sqrt{1+h}\right)^2}{h\sqrt{1+h}\left(\sqrt{4+2h^2+2h}+2\sqrt{1+h}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4+2h^2+4h-4(1+h)}{h\sqrt{1+h}\left(\sqrt{4+2h^2+4h}+2\sqrt{1+h}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2}{h\sqrt{1+h}\left(\sqrt{4+2h^2+4h}+2\sqrt{1+h}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{\sqrt{1+h}\left(\sqrt{4+2h^2+2h}+2\sqrt{1+h}\right)}=\frac{0}{1\cdot\left(\sqrt{4}+2\right)}=0.
\end{aligned}$$

14. Temos $D_f=\mathbb{R}^2$. No ponto $(0,0)$ a função f é dada por imposição, logo o cálculo das derivadas parciais nesse ponto terá de ser feito pela definição. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3h^2\cdot 0}{h^4+0}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3\cdot 0\cdot h^2}{0+h^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

15. Temos $D_f=\mathbb{R}^2$. O ponto $(-2,-2)$ verifica a condição $x=y$ logo é necessário que as derivadas parciais pedidas sejam calculadas por definição. Temos então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(-2,-2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h,-2)-f(-2,-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(-2+h)(-2)}{(-2+h)^2-(-2)^2}-4}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4-2h}{h^2-4h}-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4-2h-4h^2+16h}{h^2-4h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-4h^2+14h}{(h^2-4h)\,h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4-4h^2+14h}{(h-4)\,h^2}=\frac{4}{(-4)\cdot 0^+}=-\infty
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(-2,-2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-2,-2+h)-f(-2,-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(-2)(-2+h)}{(-2)^2-(-2+h)^2}-4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4-2h}{-h^2+4h}-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4-2h+4h^2-16h}{4h-h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h^2-18h}{(4h-h^2)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h^2-18h}{(4-h)h^2} = \frac{4}{4\cdot 0^+} = +\infty.
\end{aligned}$$

16. A função f está definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Para $(x,y)\neq(0,0)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = [\exp(xy)]'_x = (xy)'_x\exp(xy) = y\exp(xy).$$

No ponto $(0,0)$ a função f é dada por imposição, logo o cálculo da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ só pode ser feito pela definição. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(h\cdot 0)-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp 0-3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{h}
\end{aligned}$$

Este limite resulta em $+\infty$ quando $h\to 0^-$, e em $-\infty$ quando $h\to 0^+$, logo não existe a derivada parcial de 1ª ordem de f na variável x na origem. Concluímos então que a função $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tem por domínio

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\subset D_f$$

e é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\exp(xy).$$

Quanto à derivada parcial de 1ª ordem de f na variável y em $(x,y)\neq(0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\exp(xy))'_y = (xy)'_y\exp(xy) = x\exp(xy).$$

No ponto $(0,0)$ a função f é dada por imposição logo o cálculo da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ só pode ser feito pela definição. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(0\cdot h)-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp 0-3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{h}
\end{aligned}$$

Este limite resulta em $+\infty$ quando $h \to 0^-$ e em $-\infty$ quando $h \to 0^+$, logo não existe a derivada parcial de 1ª ordem de f na variável y na origem. Concluímos então que a função $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tem por domínio

$$D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset D_f$$

e é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\exp(xy).$$

17. Temos $D_f = \mathbb{R}^2$. O ponto $(0,0)$ verifica a condição $y = -x^2$ logo as derivadas parciaias pedidas só podem ser calculadas por definição. Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2\sin 0 + 0\sin h}{h^2} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{h}.\end{aligned}$$

Este limite resulta em $+\infty$ quando $h \to 0^-$ e em $-\infty$ quando $h \to 0^+$, logo não existe a derivada parcial de f na variável x na origem. O mesmo é válido para a derivada parcial de f na variável y na origem, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0\sin h + h^2\sin 0}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{h}.\end{aligned}$$

Dado que não existem as derivadas parciais de f na origem, a função não é diferenciável neste ponto (bastaria não existir uma delas).

18. A função f está definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Dado que no ponto $(0,0)$ a função é dada "por imposição", a derivada parcial neste ponto apenas pode ser calculada através da definição,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin h^3}{h^2} - 2}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h^3}{h^3} - \frac{2}{h}\right) = 1 - \infty = -\infty.$$

No cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ podemos aplicar as regras de derivação, considerando $x$como uma constante,

$$\left[\frac{3y^2\left(x^2+y^2\right)\cos\left(x^3+y^3\right) - 2y\sin\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]_{(1,0)} = \frac{0}{1} = 0$$

(embora obviamente o cálculo pela definição se possa sempre considerar).
Dado que pelo menos uma das derivadas parciais em $(0,0)$ não tem valor finito, a função f não é diferenciável em $(0,0)$. Aliás já no Exercício 8 se tinha concluído que f não é contínua em $(0,0)$, não podendo portanto ser diferenciável nesse ponto.

19. A função f está definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$. O cálculo da derivada parcial de 1ª ordem na variável x no ponto $(0,0)$ só poderá ser feito por definição, visto que a função é definida "por imposição" neste ponto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

A função f é diferenciável em $(0,0)$ se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

em que

$$\varepsilon(h,k) = f(0+h,0+k) - f(0,0) - h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

A expressão de $\varepsilon(h,k)$ é apenas

$$\varepsilon(h,k) = \frac{hk^2}{h^2+k^2} - 0 - h\cdot 0 - k\cdot 0 = \frac{hk^2}{h^2+k^2},$$

dado que $f(0,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ e também é nula a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Vamos averiguar se é nulo o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^2)}.$$

A substituição de h e de k por 0 conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$, pelo que vamos calcular alguns limites relativos. Sobre a recta $k=0$ obtemos o resultado 0, o que não permite concluir que o limite em estudo é 0. Sobre rectas $k=mh$, que passam no ponto $(0,0)$, temos os limites direccionais

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k=mh}} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ k=mh}} \frac{hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{hm^2h^2}{\sqrt{h^2+m^2h^2}\,(h^2+m^2h^2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{hm^2}{|h|\sqrt{1+m^2}\,(1+m^2)} = \frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}\,(1+m^2)} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}.
\end{aligned}$$

Os limites direccionais dependem do declive m tomado, não conduzindo necessariamente ao valor 0, pois

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{|h|} = 1$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h}{|h|} = -1.$$

Como tal, f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

20. (a) A função f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio $D_f = \mathbb{R}^2$ por ser uma função polinomial.

Para determinar a expressão geral do diferencial de f, consideremos um ponto genérico (x,y). Para os acréscimos dx e dy das variáveis x e y, temos

$$df(x,y) = dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + dy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = dx\,(2xy) + dy\left(x^2 - 3\right),$$

atendendo a que as derivadas parciais de f de primeira ordem são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 3.$$

20. (b) A função f é diferenciável no ponto $(4,3)$ visto ser diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{R}^2$. Dado que $dx = -0.01$ e $dy = 0.02$, o acréscimo Δf no ponto $(4,3)$ é

$$\begin{aligned}
\Delta f(4,3) &= f(4+dx, 3+dy) - f(4,3) = f(4+(-0.01), 3+0.02) - f(4,3) \\
&= f(3.99, 3.02) - f(4,3) = (3.99)^2 \cdot 3.02 - 3 \cdot 3.02 - \left(4^2 \cdot 3 - 3 \cdot 3\right) \\
&= 0.018702,
\end{aligned}$$

e o diferencial df no ponto $(4,3)$ é

$$\begin{aligned}
df(4,3) &= dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(4,3) + dy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(4,3) = (-0.01) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(4,3) + 0.02 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(4,3) \\
&= (-0.01) \cdot (2xy)\big|_{(4,3)} + 0.02 \cdot \left(x^2 - 3\right)\big|_{(4,3)} \\
&= (-0.01) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 3) + 0.02 \cdot \left(4^2 - 3\right) = 0.02.
\end{aligned}$$

O valor obtido para $df(4,3)$ é uma boa aproximação do acréscimo $\Delta f(4,3)$ porque a função f é diferenciável no ponto $(4,3)$.

20. (c) Recorremos ao diferencial de f no ponto $(1,2)$, onde f é diferenciável, considerando os acréscimos $dx = 0.03$ e $dy = -0.01$,

$$f(1.03, 1.99) = f(1,2) + df(1,2).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f(1.03, 1.99) &= f(1,2) + df(1,2) = -4 + df(1,2) = -4 + dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + dy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \\
&= -4 + 0.03 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + (-0.01) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \\
&= -4 + 0.03 \cdot (2xy)\big|_{(1,2)} + (-0.01) \cdot \left(x^2 - 3\right)\big|_{(1,2)} \\
&= -4 + 0.03 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 2) + (-0.01) \cdot \left(1^2 - 3\right) = -3.86.
\end{aligned}$$

22. A função f está definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Sendo f uma função diferenciável em todo o seu domínio, por ser a soma de funções diferenciáveis (notemos que $z=\sin(xy)$ é diferenciável por ser a função composta de funções diferenciáveis), em particular f é diferenciável no ponto $(a,b)=(0,0)$. Como tal, o cálculo da derivada direcional de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $\overrightarrow{v}=(1,-1)$ pode ser efectuado pelo produto interno

$$f'_{(1,-1)}(0,0)=(1,-1)|\overrightarrow{grad}f(0,0)=1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+(-1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Calculando as derivadas parciais necessárias,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(\sin(xy)+xy^2+3x\right)'_x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(y\cos(xy)+y^2+3\right)\big|_{\substack{x=0\\y=0}}=3$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(\sin(xy)+xy^2+3x\right)'_y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(x\cos(xy)+2xy\right)\big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

obtemos

$$f'_{(1,-1)}(0,0)=1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+(-1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1\cdot 3+(-1)\cdot 0=3.$$

Em alternativa, atendendo a que o vector $\overrightarrow{v}=(1,-1)$ faz o ângulo de $\alpha=-45^{o}$ (ou $\alpha'=225^{o}$) com a parte positiva do eixo dos xx e tem norma

$$\|\overrightarrow{v}\|=\|(1,-1)\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$$

a derivada direccional $f'_{(1,-1)}(0,0)$ é o valor dado por

$$\begin{aligned} f'_{(1,-1)}(0,0) &= \cos(-45^{o})\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\sin(-45^{o})\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 0=1\cdot 3+1\cdot 0=3. \end{aligned}$$

através dos cosenos diretores do vector $(1,-1)$. Para obter a derivada dirigida no mesmo ponto $(0,0)$ e segundo a mesma direção e sentido há que tomar o vector versor de $\overrightarrow{v}=(1,-1)$ dado por

$$\overrightarrow{vers}(\overrightarrow{v})=\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Quanto à derivada dirigida, ela é dada pelo produto interno

$$\begin{aligned} f'_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(0,0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big|\overrightarrow{grad}f(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 3+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 0=\frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

23. A função real f tem por domínio todo o plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{0\}$. O vector gradiente de f no ponto $(0,1)$ é dado por

$$\overrightarrow{grad}f(0,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1),\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right).$$

Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \left[y \left(\sin\frac{x}{y} - x\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} \right) \right] \Bigg|_{(0,1)} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \left[x \left(\sin\frac{x}{y} + y\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} \right) \right] \Bigg|_{(0,1)} = 0$$

temos $\overrightarrow{grad} f(0,1) = (0,0)$.

Para calcular a derivada dirigida de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, há que averiguar se o vector $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tem norma 1. De facto,

$$\|\overrightarrow{v}\| = \left\| \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

A função f é diferenciável em todo o seu domínio por ser o produto de funções diferenciáveis (notemos que $z = \sin(x/y)$ é diferenciável por ser a função composta de funções diferenciáveis nos pontos de D_f), em particular no ponto $(0,1)$. Como tal, o cálculo da derivada dirigida de f segundo o vector $\overrightarrow{v}$ pode ser efectuado pelo produto interno

$$\begin{aligned} f'_{\overrightarrow{v}}(0,1) &= f'_{(\sqrt{3}/2,1/2)}(0,1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \Bigg| \overrightarrow{grad} f(0,1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

24. A função f tem por domínio todo o plano $\mathbb{R}^2$. Para determinar a derivada dirigida de f no ponto $(0,3)$ na direção que faz um ângulo de 120^{o} com a parte positiva do eixo dos xx, notemos f é diferenciável em todo o seu domínio por ser o produto de funções diferenciáveis, em particular no ponto $(a,b) = (0,3)$. Como tal, o cálculo da derivada dirigida de f no ponto $(0,3)$ segundo qualquer vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ (de norma 1) pode ser efectuado pela fórmula

$$f'_{\overrightarrow{v}}(0,3) = f'_{(v_1,v_2)}(0,3) = \cos\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) + \sin\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,3)$$

em que α é o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,3) = (y\exp x)'_x\big|_{\substack{x=0\\y=3}} = (y\exp x)\big|_{\substack{x=0\\y=3}} = 3 \cdot 1 = 3$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,3) = (y\exp x)'_y\Big|_{\substack{x=0\\y=3}} = (\exp x)\big|_{\substack{x=0\\y=3}} = 1.$$

Se 120^{o} é o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx então a derivada dirigida $f'_{\overrightarrow{v}}(0,3)$ é dada por

$$\begin{aligned} f'_{\overrightarrow{v}}(0,3) &= f'_{(v_1,v_2)}(0,3) = \cos 120^{\text{o}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) + \sin 120^{\text{o}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{\sqrt{3} - 3}{2}. \end{aligned}$$

Notemos que as coordenadas do vector unitário $\overrightarrow{v}$ são facilmente obtidas,

$$\overrightarrow{v} = (\cos 120^o, \sin 120^o) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

25. A função f tem por domínio todo o plano $\mathbb{R}^2$. Para determinar o vector $\overrightarrow{v}$ para o qual a derivada dirigida de f é dada pela expressão $f'_{\overrightarrow{v}}(x,y) = \sin^2(x) + x^2$, comecemos por notar que f é diferenciável em todo o seu domínio por ser a soma de funções diferenciáveis (notemos que $z = y\sin^2 x = y\sin x \sin x$ é diferenciável por ser o produto de de funções diferenciáveis). Como tal, a fim de encontrar o vector unitário $\overrightarrow{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ tal que $f'_{\overrightarrow{v}}(x,y) = \sin^2 x + x^2$, podemos considerar o cálculo da derivada dirigida através pela do produto interno

$$f'_{\overrightarrow{v}}(x,y) = \cos\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

em que α é o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx. Temos então

$$f'_{\overrightarrow{v}}(x,y) = \cos\alpha \cdot (y\sin x\cos x + 2xy) + \sin\alpha \cdot (\sin^2 x + x^2).$$

Resolvendo então a equação

$$\sin^2 x + x^2 = (y\sin x\cos x + 2xy)\cos\alpha + (\sin^2 x + x^2)\sin\alpha,$$

verificamos que existe uma solução para $\cos\alpha = 0 \wedge \sin\alpha = 1$. O ângulo α que verifica esta conjunção de condições é $\alpha = \pi/2$. O vector procurado é então

$$\overrightarrow{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha) = (\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = (0,1).$$

Poderíamos ter chegado à mesma conclusão atendendo a que

$$\sin^2 x + x^2 = \left(y\sin^2(x) + x^2 y\right)'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_{(0,1)}(x,y),$$

a derivada parcial em ordem em y (em que se considera x como constante).
Para calcular a derivada de ordem 5 da função $g(x) = \sin^2 x + x^2$, aplicamos sucessivamente as regras de derivação,

$$\frac{dg}{dx}(x) = g'(x) = 2\sin x\cos x + 2x = \sin(2x) + 2x,$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2}(x) = g''(x) = [\sin(2x) + 2x]' = 2\cos(2x) + 2,$$

$$\frac{d^3 g}{dx^3}(x) = g'''(x) = [2\cos(2x) + 2]' = -4\sin(2x),$$

$$\frac{d^4 g}{dx^4}(x) = g^{(4)}(x) = [-4\sin(2x)]' = -8\cos(2x)$$

e

$$\frac{d^5g}{dx^5}(x) = g^{(5)}(x) = [-8\cos(2x)]' = 16\sin(2x).$$

A função trigonométrica $y = \sin^2 x$ e a função polinomial $w = x^2$ têm derivadas contínuas de todas as ordens. Como tal a função $g(x) = \sin^2 x + x^2$ tem derivadas contínuas de todas as ordens e, por isso, podemos afirmar que g é uma função de classe C^∞.

27. Podemos considerar um esquema auxiliar em "árvore". Pela regra de derivação da função composta (ou regra da cadeia), obtemos

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right) \\ &= (2Ax+2By)(v\cdot 2s+u) + (2Bx+2Cy)\left(\frac{1}{u}2s + \left(-\frac{1}{2\sqrt{v}}\right)\right) \\ &= (2Ax+2By)(2vs+u) + (2Bx+2Cy)\left(\frac{2s}{u} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\right). \end{aligned}$$

4.2 Questões de resposta rápida

1. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Proceda a todas as correspondências corretas entre os elementos **A1-A7** e **B1-B7**.

A1 $f(x,y) = x+y-\sqrt{16-x^2-y^2}$

A2 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

A3 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{16-x-y}$

A4 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{16-x-y}}$

A5 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$

A6 $f(x,y) = x+y-\ln(x+y-16)$

A7 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt[3]{16-x^2-y^2}}$

B1 D_f é todo o plano $\mathbb{R}^2$.

B2 D_f é o semiplano inferior à reta de equação $y = 16-x$.

B3 D_f é todo o plano $\mathbb{R}^2$ exceptuando a reta de equação $y = 16-x$.

B4 D_f é o interior do círculo de centro $(0,0)$ e raio 4.

B5 D_f é o círculo de centro $(0,0)$ e raio 4.

B6 D_f é todo o plano $\mathbb{R}^2$ exceptuando a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 4.

B7 D_f é o semiplano superior à reta de equação $y = 16-x$.

2. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Construa 4 proposições verdadeiras ligando cada elemento **C1-C4** a um elemento **D1-D4**.

C1 É falso afirmar que

C2 A curva de nível da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$ para $K = 1$ e da função $g(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ para $K = -2$

C3 É verdadeiro afirmar que

C4 Para $K = 2$ a curva de nível das funções $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ e $g(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

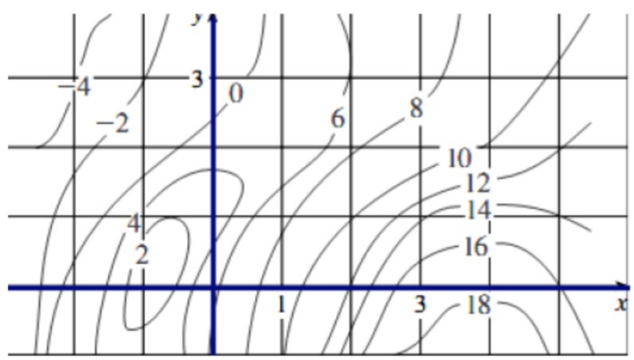
D1 as funções $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ e $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ têm a mesma curva de nível em $K = 1$.

D2 as funções $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ e $g(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ têm a mesma curva de nível em $K = 1$.

D3 é a circunferência (sobre o plano $z = 0$) definida por $x^2 + y^2 = 4$.

D4 é a mesma, constituída por um único ponto, a origem.

3. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Considere o seguinte diagrama de curvas de nível de uma certa função f.



(a) Com base do diagrama, estime o valor das derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,3) \ e \ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,3);$$

(b) Represente no diagrama uma estimativa do vector gradiente $\bigtriangledown f(-1,3)$.

4. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Seja ainda $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quais (ou qual) as afirmações que são necessariamente verdadeiras?

E1 g é contínua em $(0,0)$ (i.e, é o prolongamento por continuidade da função f).

E2 ao contrário de g, f é contínua em $(0,0)$.

E3 g não tem limite em $(0,0)$.

E4 g tem limite em $(0,0)$, de valor 2.

E5 f e g têm o mesmo limite em $(0,0)$, de valor 0.

5. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Dada $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\}\to\mathbb{R}$, seja

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\neq(0,1)\\ 3, & (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

Sabendo que g é contínua, quais (ou qual) as afirmações que são necessariamente verdadadeiras?

F1 Não existe $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y)$.

F2 $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y)=3$.

F3 $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=3$.

F4 $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=0$.

F5 $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y)\neq\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

6. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Quais (ou qual) as afirmações que são necessariamente verdadeiras?

G1 Se $\lim_{x\to0,y=x} f(x,y)=5$ e $\lim_{x\to0,y=3x} f(x,y)=15$ então f não tem limite em $(0,0)$.

G2 Se $\lim_{x\to0,y=x} f(x,y)=5$ e $\lim_{x\to0,y=3x} f(x,y)=5$ então a função f tem limite em $(0,0)$.

G3 Se a função f tem limite em $(0,0)$ e $\lim_{x\to0,y=x} f(x,y)=5$ então $\lim_{x\to0,y=3x} f(x,y)=5$.

G4 Se $\lim_{x\to0,y=x} f(x,y)=0$ e $\lim_{x\to0,y=3x} f(x,y)=0$ então a função f tem limite em $(0,0)$.

7. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Considere a função $f(x,y)=x\cos(xy)$ e o vetor $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   (a) Qual a expressão da derivada de f no ponto $(1,\pi)$ segundo a direção do vector (v_1,v_2)?

   (b) Qual a taxa de variação instantânea (derivada dirigida) de f no ponto $(1,\pi)$ segundo a direção do vector (v_1,v_2)?

   (c) Qual o vector (v_1,v_2) segundo o qual a taxa de variação instantânea de f num ponto (a,b) é igual a $-a^2\sin(ab)$?

   (d) Qual o vector (v_1,v_2) que garante o maior aumento da função f a partir do ponto $(1,\pi)$?

8. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $f(0,1)=3$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=2=\frac{\partial f}{\partial y}(0,1).$$

Quais (ou qual) das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras?

H1 Se $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{f(x,y)-3-2x-2(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ então f é diferenciável em $(0,1)$.

H2 A função f é diferenciável em $(0,1)$.

H3 Se a função f é diferenciável em $(0,1)$ então o plano $z = 3+2x+2(y-1)$ é tangente ao seu gráfico no ponto $(0,1,f(0,1))$.

H3 A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1,f(0,1))$ é $z = 3+2x+2(y-1)$.

9. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(1,2)$. Sabendo que $f(1,2) = -4$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2$, determine um valor aproximado para a imagem $f(-0.9,2.2)$.

10. (**1º Teste Auto-Avaliação 2016**) Seja $f = f(x,y) = 5u+2uv-v$ em que

$$u = 6x+4 \;\; e \;\; v = \sin(y)+x^2y+\exp(y).$$

Determine a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.