

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Exercício 8 Capítulo 4

A Zippy produção de motocicletas produz duas bicicletas de bolso populares (miniaturas de motocicletas com motores de 49cc): as Razor e as Zoomer. Na próxima semana, a empresa quer produzir até 700 bicicletas e quer garantir que o número de Razors produzidas não excede o número de Zoomers em mais que 300.

Cada Razor produzida e vendida resulta num lucro de \$70 enquanto cada Zoomer resulta num lucro de \$40. As bicicletas são mecanicamente idênticas, diferindo apenas na aparência do acabamento à base de polímero ao redor do tanque de combustível e assento. Cada Razor requer 2 libras de polímero e 3 horas de produção enquanto cada Zoomer requer 1 libra de polímero e 4 horas de produção.

Assuma que estão disponíveis 900 libras de polímero e 2400 horas de mão de obra para a próxima semana. Como maximizar o lucro? Variáveis de decisão:

x_1 -> número de Razors a produzir na próxima semana

x_2 -> número de Zoomers a produzir na próxima semana

Modelo em PL:

$$\text{Max Lucro} = 70x_1 + 40x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 \leq 700 \text{ (não produzir mais que 700 bicicletas)}$$

$$x_1 - 300 \leq x_2 \text{ (não exceder em mais que 300)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 900 \text{ (quantidade de polímero)}$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400 \text{ (horas de produção)}$$

BREVE ANÁLISE DA SOLUÇÃO:

De modo a obter um lucro máximo semanal de \$33600 deverão ser produzidos 240 Razors e 420 Zoomers. Em relação às restrições:

R1: no total estão a ser produzidas 660 bicicletas das 700 que eram permitidas.

R2: A produção das Razors será de 180 unidades abaixo das Zoomers (sendo que poderia ter sido maior que as Zoomers em 300 unidades)

R3: Os polímeros serão usados na totalidade.

R4: as horas de trabalho para produção serão usadas na sua totalidade.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$C\$3	quantidade x1	240	0	70	10	40
\$D\$3	quantidade x2	420	0	40	53,33333333	5

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$7	Produção Máxima	660	0	700	1E+30	40
\$E\$8	Relação qt Produtos	-180	0	300	1E+30	480
\$E\$9	Polímeros	900	32	900	200	300
\$E\$10	Horas	2400	2	2400	200	800

- a) Se o profit das Razors descesse para \$35, a solução ótima alterar-se-ia?

O lucro unitário das Razors original era 70 e passou a 35, tendo havido uma variação no coeficiente de \$35.

Como $35 \leq 40$ = permissível diminuir, então a solução ótima não iria sofrer qualquer alteração.

IMPACTO NO LUCRO: Embora $x_1=240$ e $x_2=420$, o coeficiente de x_1 na função objetivo altera-se de \$70 para \$35 pelo que o lucro se irá alterar de \$33600 para \$25200.

- b) Se o lucro unitário das Zoomers descesse para \$35, a solução ótima alterar-se-ia?

Como o coeficiente de x_2 na função objetivo diminui em 5 unidades, que corresponde ao permissível diminuir máximo, então a solução ($x_1=240$ e $x_2=420$) continua a ser ótima, no entanto atingimos o limite exato do permissível diminuir pelo que sabemos que existe outro ponto extremo ótimo e entre estes dois existe uma infinidade de soluções ótimas. Neste caso diz-se que o problema tem opções ótimas múltiplas ou soluções ótimas alternativas.)

- c) Interprete o preço sombra para a restrição do polímero.

Polímeros: correspondem à R3

Preço sombra é igual a \$32, isto significa que por cada unidade adicional até 200 (permissível aumentar) o valor ótimo da solução, ou o lucro irá aumentar em \$32 e por cada unidade a menos até 300 (permissível diminuir) o lucro irá diminuir em \$32 (pressupondo que nenhum outro parâmetro se altera).

- d) Porque é que o preço sombra da restrição que limita a produção de bicicletas de bolso para não mais que 700 unidades é \$0?

Restrição 1-> Esta restrição não é ativa na solução ótima, estando a ser produzidas 40 unidades abaixo do limite máximo que é 700. Se alterássemos o número no lado direito da restrição (dentro dos limites definidos) o lucro não iria alterar na função objetivo. Assim, o preço sombra para estas variações é 0.

- e) Suponha que a companhia conseguia obter 300 horas adicionais de trabalho na produção. Qual seria o novo lucro ótimo?

Até ao permissível aumentar = 200 horas, o lucro ótimo iria sofrer uma variação positiva de \$2, logo seria $\$33600 + \$400 = \$34000$.

A partir deste limite não sabemos dizer qual será o novo lucro pelo que seria necessário reotimizar o problema para determinar o impacto que teria no lucro final.

Exercício 12 Capítulo 4

A companhia Weedwacker produz dois tipos de cortadores de relva: um modelo elétrico e um modelo a gás. A companhia foi contratada para um fornecimento nacional num total de 30,000 cortadores elétricos e 15,000 cortadores a gás.

No entanto, a capacidade da produção da empresa é limitada em 3 departamentos: produção, junção e empacotar. A tabela seguinte sumariza as horas de processamento disponíveis e o tempo requerido por cada departamento para cada um dos cortadores de relva.

	Hours Required per Trimmer		Hours Available
	Electric	Gas	
Production	0.20	0.40	10,000
Assembly	0.30	0.50	15,000
Packaging	0.10	0.10	5,000

A companhia produz um cortador elétrico por \$55 e um cortador a gás por \$85. Alternativamente, ela pode comprar de outra empresa os mesmos cortadores pelos preços de \$67 e \$95, respetivamente.

Quantos cortadores a gás e elétricos é que a companhia deve fazer e comprar exteriormente para que consiga cumprir o contrato de maneira a minimizar o custo?

Variáveis de Decisão:

P1-> número de cortadores elétricos a produzir

P2 -Z número de cortadores a gás a produzir

C1-> número de cortadores elétricos a comprar

C2-> número de cortadores a gás a comprar

Modelo em PL:

Custo Total = Custo Compra + Custo Produzir

Min Custo = $55P1 + 85P2 + 67C1 + 95C2$

Sujeito a:

$0.2P1 + 0.4P2 \leq 10000$

$0.3P1 + 0.5P2 \leq 15000$

$0.1P1 + 0.1P2 \leq 5000$

$P1 + C1 = 30000$

$P2 + C2 = 15000$

$P1, P2, C1, C2 \geq 0$

RELATÓRIO DE SENSIBILIDADE

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$C\$3	Produzir int. Eléctrico	30000	0	55	7	1E+30
\$D\$3	Produzir int. Gás	10000	0	85	10	14
\$C\$4	Comprar ext. Eléctricc	0	7	67	1E+30	7
\$D\$4	Comprar ext. Gás	5000	0	95	14	10

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$C\$10	Disponível Eléctrico	30000	60	30000	20000	10000
\$D\$10	Disponível Gás	15000	95	15000	1E+30	5000
\$E\$14	Produção Usadas	10000	-25	10000	800	4000
\$E\$15	Montagem Usadas	14000	0	15000	1E+30	1000
\$E\$16	Embalamento Usadas	4000	0	5000	1E+30	1000

- a) Quanto é que os cortadores elétricos teriam que custar para que a companhia considerasse comprar cortadores em vez de os produzir?

Na solução ótima obtida apenas estão a ser produzidos cortadores elétricos e não estão a ser comprados nenhuns exteriormente. Para que isto se alterasse, o custo unitário de produzir internamente os aparelhos elétricos teria que aumentar em pelo menos \$8 = permissível aumentar, para \$63.

- b) Se o custo de produção dos cortadores a gás aumentasse para \$90, o que é que iria acontecer à solução ótima?

Como teríamos um aumento de $90-85 = 5$, que está dentro do limite do permissível aumentar, a solução ótima manter-se-ia.

- c) Quanto é que a companhia deveria estar disposta a pagar para adquirir capacidade adicional nas horas de montagem?

A restrição correspondente às horas de montagem é a R4.

Como as horas de montagem não estão a ser utilizadas na sua totalidade (consistindo numa restrição não ativa, em que existe excesso de capacidade de montagem), a empresa não deverá adquirir horas adicionais nesta secção pois não será vantajoso.

Por esta mesma razão o preço sombra é \$0 pois não haverá qualquer vantagem económica do ponto de vista da função objetivo.

- d) Quanto é que a companhia deveria estar disposta a pagar para adquirir capacidade adicional na área de produção?

A restrição correspondente à secção de produção é uma restrição ativa, ou seja estamos a utilizar toda a disponibilidade das horas de produção.

O preço sombra é -25, de onde se retira que a empresa estará disposta a pagar até \$25 por cada hora adicional para além do valor que anteriormente pagava por cada hora a mais nesta secção dentro do limite do que é permissível aumentar, ou seja, em 800h.

O custo poderia diminuir no máximo em $(-25)*(800) = -\$20000$, ou seja até \$2955000.

- e) Que na verdade é a f!!! Suponha que as horas de produção disponíveis são incertas e podem variar entre 9500 e 10500. Como é que a solução ótima varia para cada 100h a mais na capacidade de produção dentro destes limites?

O preço sombra que é -25 é válido dentro do intervalo de variação dado. Pode aumentar até 800h e diminuir em até 4000h.

Uma variação entre 9500h e 10500 está dentro do intervalo de variação.

Por cada 100h adicionais, o custo irá variar em $(+100)*(-25) = -\$2500$, ou seja, o custo irá ser reduzido em \$2500 desde que cada hora adicional custe o mesmo que custou cada uma das 10000 horas.

No caso de reduzirmos as horas a variação no custo não será tão vantajosa porque este irá aumentar \$2500 por cada 100h a menos.

Exercício 18 Capítulo 4

A empresa Valu-Com Eletronics produz 5 modelos diferentes de cartões de telecomunicações de interface para PC's e portáteis. Como podemos ver na tabela seguinte, cada um destes dispositivos requer quantidades diferentes de placas de circuitos, resistores, chips de memória e montagem.

	Per Unit Requirements				
	HyperLink	FastLink	SpeedLink	MicroLink	EtherLink
Printed Circuit Board (square inches)	20	15	10	8	5
Resistors	28	24	18	12	16
Memory Chips	8	8	4	4	6
Assembly Labor (in hours)	0.75	0.6	0.5	0.65	1

O custo unitário de venda e de produção para cada modelo é:

	Per Unit Revenues and Costs				
	HyperLink	FastLink	SpeedLink	MicroLink	EtherLink
Wholesale Price	\$189	\$149	\$129	\$169	\$139
Manufacturing Cost	\$136	\$101	\$96	\$137	\$101

No próximo período de produção, a Valu-Com tem 80,000 metros quadrados de PC Board, 100,000 resistores, 30,000 chips de memória e 5,000 horas de montagem disponíveis. A companhia consegue vender todos os produtos que produzir, mas o departamento de vendas quer ter a certeza que a empresa produz pelo menos 500 unidades de cada produto e pelo menos 2 vezes mais cartões fastLink do que HyperLinks enquanto maximiza o lucro.

Variáveis de decisão:

X_i – número de cartões do tipo i a produzir no próximo período de produção, em que $i = 1$ (HL), 2 (FL), 3 (SL), 4 (ML), 5 (EL)

Modelo em PL:

$$\text{Max Lucro} = (189-136)x_1 + (149-101)x_2 + (129-96)x_3 + (169-137)x_4 + (139-101)x_5$$

Sujeito a:

$$20x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 5x_5 \leq 80000$$

$$28x_1 + 24x_2 + 18x_3 + 12x_4 + 16x_5 \leq 100000$$

$$8x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 30000$$

$$0.75x_1 + 0.6x_2 + 0.5x_3 + 0.65x_4 + x_5 \leq 5000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 500$$

$$x_2 \geq 2x_1$$

RELATÓRIO DE SENSIBILIDADE

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$D\$6	Nº a produzir HyperLink	500	0	53	43,66666667	1E+30
\$E\$6	Nº a produzir Fastlink	1000	0	48	16	1E+30
\$F\$6	Nº a produzir SpeedLink	1500	0	33	15	1
\$G\$6	Nº a produzir MicroLink	2250	0	32	1	5,272727273
\$H\$6	Nº a produzir EtherLink	500	0	38	9,666666667	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$I\$11	Placas	60500	0	80000	1E+30	19500
\$I\$12	Resistências	100000	0,166666667	100000	10500	6000
\$I\$13	Memórias	30000	7,5	30000	2000	2333,333333
\$I\$14	Montagem (h)	3687,5	0	5000	1E+30	1312,5
\$I\$15	relação entre x1 e x2	0	-16	0	875	500
\$I\$16	Minimo HL (x1)	500	-43,66666667	500	328,125	250
\$I\$17	Minimo FL (x2)	1000	0	500	500	1E+30
\$I\$18	Minimo SL (x3)	1500	0	500	1000	1E+30
\$I\$19	Minimo ML (x4)	2250	0	500	1750	1E+30
\$I\$20	Minimo EL (x5)	500	-9,666666667	500	954,5454545	500

a) Quais das restrições do problema são ativas?

As restrições ativas são aquelas cujo valor final corresponde ao valor da restrição do lado direito. Assim, neste problema correspondem às restrições da quantidade de resistências disponíveis (estão a ser utilizadas na sua totalidade), da quantidade de chips de memória disponíveis, do mínimo de produção de HyperLinks e EtherLinks e a relação entre x1 e x2 (Hyperlinks e Fastlinks).

b) Se a companhia tivesse que eliminar um dos tipos de cartões, qual deveria ser?

A empresa deveria eliminar os cartões do tipo 1 ou do tipo 5, pois são aqueles que têm o preço sombra negativo ou seja, diminuir a produção de cartões deste tipo aumentaria o lucro ótimo.

Por cada cartão do tipo 1 a menos a ser produzido, o lucro teria uma variação positiva $(-1) \cdot (-43,7) = 43,7$ ou seja, o lucro aumenta em \$43,7. Esta relação é válida até se atingir o limite do permissível diminuir, ou seja, até a uma redução no número de cartões até $500 - 250 = 250$.

Assim, até uma redução de 250 cartões o lucro ótimo iria aumentar no valor de $250 \times 43,7 = \$10925$. Para decréscimos superiores a 250 cartões, sabemos que o lucro continuará a aumentar, mas não sabemos quanto.

Para os cartões do tipo 5: o permissível diminuir é igual ao número de cartões que foram produzidos na solução ótima, de onde se retira que, como o preço sombra é -9,7; o lucro ótimo final iria aumentar em \$9,7 por cada cartão a menos e $9,7 \times 500 = \$4850$ quando eliminássemos a produção total deste tipo de cartões.

Assim se conclui que a empresa deveria optar por eliminar os cartões do tipo 1 pois, do ponto de vista econômico e com base na informação que temos disponível, a não produção destes cartões representaria um maior aumento no lucro.

- c) Se a companhia pudesse comprar 1000 chips de memória adicionais ao preço usual, deveriam fazê-lo? Se sim, quanto é que o lucro iria aumentar?

O número de chips, 1000 está dentro do intervalo do que é permissível aumentar (até 2000), pelo que nestas condições, o preço sombra é válido.

Sabemos que, por cada chip de memória adicional, o lucro ótimo aumentará em \$7,5 daí que sim, a empresa deveria adquirir os 1000 chips de memória adicional, pois teriam, no máximo um aumento no lucro de \$7500.

- d) Suponha que os preços de produção foram mal estimados e podem ter imprecisões. Com quais produtos deveria a empresa estar mais preocupada em obter os custos certos e precisos antes de implementar esta solução?

Os custos de produção podem ter imprecisões, portanto isto pode afetar diretamente o lucro unitário de produção.

Por observação do relatório de sensibilidade, o valor de permissível diminuir dos cartões SpeedLink é bastante reduzido: \$1 quando o lucro unitário original é \$33. O mesmo se passa com os cartões do tipo ML onde o permissível aumentar é também apenas \$1 para um lucro unitário de \$32.

Ou seja, basta uma pequena variação no lucro unitário destes produtos para que a solução ótima se altere. Assim os custos de produção dos cartões 3 e 4 deverão ser estimados de forma cuidadosa pois são aqueles que poderão causar mais impacto na solução final.

Exercício 15 Capítulo 4

O rancho Beef-Up alimenta gado para fazendeiros do médio-oeste e entrega-o às fábricas de processamento em Topeka, Kansas e Tulsa, Oklahoma. O rancho deve determinar as quantidades de ração para gado a comprar para que as várias necessidades nutricionais sejam atendidas, minimizando os custos totais. A mistura fornecida às vacas deve conter diferentes níveis de 4 nutrientes essenciais e podem ser feitos pela mistura de três feeds diferentes. A quantidade de cada nutriente em onças encontrada em cada libra de feed está na seguinte tabela:

1 libra = 16 onças

Nutrient	Nutrient (in ounces) per Pound of Feed		
	Feed 1	Feed 2	Feed 3
A	3	2	4
B	3	1	3
C	1	0	2
D	6	8	4

O custo por libra das feeds 1,2 e 3 é \$2.00, \$2.5 e \$3 respectivamente. O mínimo requerido por vaca em cada mês é de 4 libras do nutriente A, 5 libras do nutriente B, 1 libra do nutriente C e 8 libras do nutriente D.

No entanto, as vacas não devem ser alimentadas mais de 2 vezes do valor do mínimo requerido para qualquer nutriente todos os meses. Adicionalmente, o rancho consegue apenas obter 1500 libras de cada tipo de feed cada mês. Porque existem 100 vacas usualmente no rancho num determinado tempo, cada vaca não pode ser alimentada por mês com mais do que 15 libras de cada tipo.

Variáveis de decisão

X_i = quantidade em libras de comida de tipo i com que devem ser alimentadas as vacas em cada mês, $i = 1,2,3$ para cada tipo de feed

Modelo em PL:

$$\text{Min custo} = 2x_1 + 2.5x_2 + 3x_3$$

Sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 4 \cdot 16 \text{ (mínimo requerido nutriente A)}$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 5 \cdot 16 \text{ (mínimo requerido nutriente B)}$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 16 \text{ (mínimo requerido nutriente C)}$$

$$6x_1 + 8x_2 + 4x_3 \geq 8 \cdot 16 \text{ (mínimo requerido nutriente D)}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2 \cdot (4 \cdot 16) \text{ (máximo nutriente A)}$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5 \cdot 16 \cdot 2 \text{ (máximo nutriente B)}$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 16 \cdot 2 \text{ (máximo nutriente C)}$$

$$6x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 8 \cdot 16 \cdot 2 \text{ (máximo nutriente D)}$$

$$X_i \leq 15, i=1,2,3 \text{ (máximo libras de cada feed)}$$

RELATÓRIO DE SENSIBILIDADE

Célula de Objetivo (Mínimo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$F\$17	custo	0	79,25

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$C\$16	quantidade (lb) x1	15	0	2	3,25	1E+30
\$D\$16	quantidade (lb) x2	9,5	0	2,5	1E+30	1,5
\$E\$16	quantidade (lb) x3	8,5	0	3	4,5	6,5

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$F\$20	Nutriente A (Mín)	98	0	64	34	1E+30
\$F\$21	Nutriente B (Mín)	80	2,5	80	5,5	9
\$F\$22	Nutriente C (Mín)	32	0	16	16	1E+30
\$F\$23	Nutriente D (Mín)	200	0	128	72	1E+30
\$F\$24	Nutriente A (Máx)	98	0	128	1E+30	30
\$F\$25	Nutriente B (Máx)	80	0	160	1E+30	80
\$F\$26	Nutriente C (Máx)	32	-2,25	32	6,333333333	3,666666667
\$F\$27	Nutriente D (Máx)	200	0	256	1E+30	56
\$F\$28	Máximo Alim. 1 (x1)	15	-3,25	15	6,333333333	3,666666667
\$F\$29	Máximo Alim. 2 (x2)	9,5	0	15	1E+30	5,5
\$F\$30	Máximo Alim. 3 (x3)	8,5	0	15	1E+30	6,5

a) A solução é degenerada?

A solução não é degenerada, porque teria que existir pelo menos uma restrição para a qual o termo independente tivesse o valor do permissível aumentar ou diminuir igual a zero e tal não acontece.

b) A solução é única?

A solução ótima é única. Para não ser, para alguma das variáveis o coeficiente da função objetivo teria que ter como permissível diminuir ou aumentar o valor 0.

c) Explique o sinal do preço sombra das restrições que limitam o valor das variáveis de decisão. Ou seja, considerando o valor ótimo de cada variável de decisão, por que razão o sinal do seu preço sombra faz sentido em termos económicos.

A restrição que limita a feed 1 é ativa, isto é, toda a ração disponível está a ser utilizada e portanto, ao adquirir mais desta ração obter-se-iam soluções mais económicas, ou seja, de menor custo daí o preço sombra ser negativo.

A variação seria $(+x) \cdot (-3,25) = -3,25x$ uma descida no custo de $\$3,25x$, sendo x a quantidade que quiséssemos aumentar até dentro do intervalo permissível $= 3,7$.

Em relação aos alimentos 2 e 3, estes não estão a ser utilizados na sua totalidade, pelo que não faria qualquer sentido adquirir quantidade extra de nenhuma destas rações, pois não teria qualquer impacto no lucro ótimo final. Assim, o preço sombra destes é realmente 0.

- d) Suponha que o custo por libra da Feed 3 aumentava em $\$3$. A solução ótima iria mudar? O valor ótimo mudaria?

Como $\$3$ é menor que $4,5 =$ permissível aumentar no coeficiente da função objetivo para o custo da Feed 3, então a solução ótima não iria ser alterada. No entanto, o custo ótimo iria de facto aumentar, uma vez que o custo unitário também aumentou em $\$3$.

- e) Se a companhia pudesse reduzir algum dos requerimentos dos nutrientes, qual deveria escolher e porquê?

Caso fosse possível, reduziriam o requisito mínimo do nutriente B. Esta é uma restrição ativa no limite inferior e reduzir o seu valor faria diminuir o custo ótimo em $\$2,5$ por cada unidade reduzida até uma redução de 9 unidades.

- f) Se a companhia pudesse aumentar algum dos requerimentos dos nutrientes, qual deveria escolher e porquê?

Caso fosse possível, aumentariam o requisito máximo do nutriente C. Esta é uma restrição ativa no limite superior e aumentar o seu valor faria diminuir o custo ótimo em $\$2,25$ por cada unidade aumentada até um aumento de 6,33 unidades.