

ISCTE - IUL
Fundamentos de Álgebra Linear
Exame de 2ª Época

Licenciatura em Ciência de Dados
Ano Letivo 2020/2021, 1º trimestre

19 de janeiro de 2021

Nome do aluno:

Número do aluno:

Turma:

Observações:

1. Duração da prova: 2h00.
2. Deve responder a todas as questões nos espaços reservados às respostas. **Justifique convenientemente todas as respostas.**
3. A prova deve ser efetuada **sem consulta**.
4. Só é permitida a utilização de material de escrita. Em particular, não é permitida a utilização de máquina de calcular. Só são corrigidas as respostas apresentadas a caneta.
5. Durante a prova não é permitido o uso de telemóveis ou quaisquer equipamentos eletrónicos.
6. Não destaque as folhas do teste.

Espaço reservado para cotações:

1ª Parte

Esta 1ª Parte é de **resposta rápida**, não devendo apresentar quaisquer cálculos ou justificações.

(4.0 val.) Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ matrizes de entradas reais. Seja $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Sabe-se que:

- A está em escada, os elementos da primeira linha são todos iguais a 1 e $r(A) = 2$;
- $\det(B) = \frac{1}{2}$;
- $r(C) = 3$.

(0.75 val.) 1. A entrada $(2A^\top A)_{11}$ é igual a _____.

(0.5 val.) 2. O número de linhas linearmente independentes de A é _____.

(0.5 val.) 3. Quanto à existência de solução, o sistema $AX = N$ é _____.

(0.75 val.) 4. Se $2C^\top C = 4I_3$ (I_3 matriz identidade 3×3) então C é invertível e $C^{-1} =$ _____.

(0.75 val.) 5. Tem-se que:

$$\det(-2B^{-1}) = \text{_____,} \quad \det(AB) = \text{_____,} \quad \det(B^\top B) = \text{_____}.$$

(0.75 val.) 6. Se u, v são vetores linearmente independentes tais que $Au = u$ e $Av = v$ então os valores próprios de A são _____.

2ª Parte

Nas questões da 2ª Parte deverá apresentar o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos e justificações necessárias.

- (4.5 val.) 1. Considere o sistema de equações lineares, $AX = B$, nas incógnitas x, y, z , e parâmetros reais α, β , dado por:

$$\begin{cases} x - z = -2\beta \\ -x - y + 2z = 1 \\ x + y + \alpha z = \beta - 1 \end{cases}$$

- (2.5 val.) (a) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros reais α, β .
- (1.0 val.) (b) Considerando $\alpha = -2$ e $\beta = 0$, mostre que o conjunto-solução do sistema obtido é uma reta e represente-o na forma

$$P_0 + \text{span}\{u\}$$

- (c) Considere agora $\alpha = -4$ e $\beta = 0$ no sistema inicial $AX = B$.
- (0.5 val.) (i) Calcule o determinante de A ;
- (0.5 val.) (ii) Recorrendo ao método de Cramer, indique o valor da variável x .

- (2.5 val.) 2. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações.

- (1.0 val.) (a) O conjunto $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$ é um subespaço $\mathbb{R}^2$.
- (1.5 val.) (b) O conjunto $\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = 0, y = 0\}$ é um subespaço $\mathbb{R}^3$.

- (4.5 val.) 3. Considere o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ representado pela matriz

$$A = M(f; b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função linear definida por $g(x, y) = (2y, x + y, x)$.

- (1.0 val.) (a) Determine a matriz $B = M(g; b.c., b.c.)$.
- (1.0 val.) (b) Mostre que f é invertível e calcule $f^{-1}(2, 3)$.
- (1.5 val.) (c) Determine a matriz $C = M(g \circ f; b.c., b.c.)$ e a expressão analítica da função composta $(g \circ f)(x, y)$.
- (1.0 val.) (d) Seja $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que $(1, 0) = e'_1 + e'_2$ e $(0, 1) = e'_1$. Indique a matriz $P = M(id; b.c., \mathcal{B}')$ e use-a para determinar $A' = M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

(3.5 val.)

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1.5 val.)

(a) Determine os valores próprios de A e os subespaços próprios associados.

(1.0 val.)

(b) Justifique que A é diagonalizável e indique a matriz diagonal D e a matriz invertível P tais que $D = P^{-1}AP$ (Não necessita de verificar que $D = P^{-1}AP$).

(1.0 val.)

(c) Usando a decomposição $A = PDP^{-1}$, determine A^{2021} .

(1.0 val.)

5. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função linear e suponha que $n > m$. Use o teorema da dimensão para mostrar que f **não pode ser injetiva**.