

Optimização para Ciência de Dados

2021/2022

2.º Semestre

1ª Época: Teste/Exame

4 de Junho de 2022

Duração: 2h00

Observações:

- **Justifique** as suas respostas.
- As **folhas devem permanecer agrafadas**.
- As respostas a lápis não serão classificadas.
- Não escreva a vermelho.
- Não é permitida a posse de **dispositivos electrónicos**, sob pena de anulação da prova.
- Durante a prova não são prestados esclarecimentos sobre o enunciado.
- A **folha de rascunho** está disponível no final da prova (página 10).
- Caso o espaço dado para a resposta a cada questão não seja suficiente, **poderá responder na folha de rascunho ou noutra local, desde que, no espaço reservado à resposta, indique esse local**.

Nome Completo:

N.º de estudante:

Turma:

Compromisso de Honra

Assinatura _____

“Tomei conhecimento, nos termos do disposto no código de conduta académica (regulamento nº25/2017, ponto 3 do anexo I) que a posse/uso de material não autorizado num teste/frequência/exame e/ou a comunicação/cópia com outra pessoa implica a anulação da prova pelo docente, a reprovação na UC no ano letivo a que reporta, a comunicação à Reitoria e o registo na pauta da UC e no meu processo individual. Em caso de reincidência, a sanção disciplinar poderá ir da suspensão temporária da frequência das atividades escolares no ISCTE até à interdição da frequência de atividades escolares por um período de até cinco anos.”

(Não escreva nesta zona)

1. A AgriBio pretende planear o cultivo dos cereais A1, A2, A3 e A4 para a próxima época de produção agrícola. Para tal, desenvolveu o modelo de optimização linear apresentado de seguida. As variáveis de decisão representam os hectares a cultivar dos cereais A1, A2, A3 e A4 e a AgriBio pretende maximizar o lucro (em €). A primeira restrição diz respeito à exigência de cultivo do cereal A3 (em ha). A segunda restrição refere-se à área total disponível para cultivo (em ha). A terceira e quarta restrições dizem respeito, respectivamente, ao orçamento disponível para suportar todos os custos com esta produção (em €) e à água total disponível durante esta época de cultivo (em milhares de m3).

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 350 x_1 + 650 x_2 + 450 x_3 + 600 x_4 \\ \text{s.a.: } &x_3 \geq 1200 \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10\,000 \\ &600 x_1 + 800 x_2 + 500 x_3 + 700 x_4 \leq 7\,000\,000 \\ &0,3 x_1 + 0,4 x_2 + 0,6 x_3 + 0,5 x_4 \leq 4250 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando o Solver, obtiveram-se os seguintes resultados:

Nome	Valor Original	Valor Final
FO	0	5808750

Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
x1	0	-137,5	350	137,5	1E+30
x2	6075	0	650	20,58823529	170
x3	1200	0	450	29,16666667	1E+30
x4	2200	0	600	212,5	12,5

Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
Rest. 1	1200	-29,16666667	1200	942,8571429	1200
Rest. 2	9475	0	10000	1E+30	525
Rest. 3	7000000	0,708333333	7000000	630000	1458000
Rest. 4	4250	208,3333333	4250	630	330

No caso de serem necessários cálculos finais que requeiram o uso de calculadora, basta que os indique.

- a) [1,5] Indique as áreas a cultivar de cada cereal e o lucro total. Justifique.

- b) [1,0] Qual o lucro total que a AgriBio obterá com cada um dos cereais? Justifique.

Responda às questões seguintes apenas com base na informação do relatório de sensibilidade:

- c) **[1,0]** A área disponível para cultivo será usada na totalidade? E o que poderá dizer-se quanto à água disponível? Justifique.
- d) **[1,25]** Suponha que a AgriBio planeia inovar no cultivo do cereal A2 e que, com isso, o lucro por hectare cultivado aumentará em €10. Quais as alterações nas áreas a plantar? E no lucro total? Justifique.
- e) **[1,25]** Suponha que a área de cultivo do cereal A3 não poderá ser inferior a 1300 ha. Quais as alterações nas áreas a plantar? E no lucro total? Justifique.
- f) **[1,5]** Avizinha-se um período de seca e a AgriBio receia que a quantidade disponível de água venha a ser inferior à inicialmente prevista. A APB, Associação de Produtores Bio, possui um fundo monetário especial, ao qual a AgriBio poderá recorrer para compensar as perdas resultantes da escassez de água. Quanto é que a AgriBio deverá pedir de apoio monetário à APB caso venham a verificar-se os seus piores receios? Justifique.

2. A AsaLeve produz uma ração especial para aves. Esta ração é exclusivamente composta pelos cereais A, B e C, sendo que terá de conter: i) no mínimo, 30% do cereal B; e ii) no máximo, 10% do cereal C. Antes de proceder à mistura, os cereais têm de ser triturados separadamente. No próximo ciclo de produção, existe um único equipamento de trituração, cujo tempo total de utilização não poderá exceder as 450 horas. Além disso, devido à escassez de cereais no mercado, sabe-se que não será possível usar mais de 50 toneladas do cereal B. Os tempos de trituração e os custos dos cereais são os seguintes:

	A	B	C
Trituração (horas/tonelada)	2,5	3,0	4,5
Custo (€/tonelada)	420	470	350

A AsaLeve pretende determinar a forma mais económica de produzir uma quantidade não inferior a 160 toneladas da ração.

- a) [2,5] Apresente o modelo em programação linear que permite determinar a quantidade a usar de cada cereal. Indique o significado das variáveis, assim como da função objectivo e das restrições.

b) [2,0] Suponha que a AsaLeve conseguirá obter um desconto de €3000 caso adquira, pelo menos, 75 e 15 toneladas dos cereais A e C, respectivamente. Mantendo o modelo linear, proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a).

c) [1,0] Suponha que continua a existir um único equipamento de trituração, com a mesma disponibilidade. Contudo, os cereais A e B têm de ser triturados em simultâneo, sendo o tempo de trituração, em horas, dado por:

$$0,012 X^2 + 0,023 Y^2 + 0,009 X Y$$

onde X e Y representam, respectivamente, a quantidade a triturar dos cereais A e B. O cereal C tem de ser triturado separadamente, nas condições descritas inicialmente. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a).

3. [2,0] Devido à previsão de subida de preços, a AgriBio pretende manter alguns cereais em armazém durante os próximos seis meses. Para tal, terá de arrendar alguns armazéns, a partir dos quais servirá as várias zonas do país. A AgriBio identificou cinco armazéns possíveis. As zonas que poderão ser servidas por cada armazém e o custo do arrendamento de cada armazém são os seguintes:

Armazém	Zonas	Custo (€)
A	1, 2, 4	2000
B	1, 3, 4	2200
C	2, 3, 5, 6	3000
D	5, 6, 7	2900
E	6, 7	2350

A AgriBio pretende arrendar os armazéns da forma mais económica possível, mas de modo garantir que todas as zonas poderão ser servidas por algum armazém. Formule o problema em programação linear inteira. Apresente todas as justificações necessárias, nomeadamente, o significado das variáveis, da função objectivo e das restrições.

4. Considere o seguinte problema:

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.: } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ inteiros}$$

a) [2,0] Resolva graficamente a relaxação em programação linear. Justifique.

b) [1,0] A partir da solução obtida em a), indique um limite para o valor ótimo do problema original. Justifique.

- c) [2,0]** Resolva o problema original usando o algoritmo de Branch and Bound. Apresente todos os cálculos e justificações necessárias.

