

Optimização para Ciência de Dados

2020/2021

2.º Semestre

2ª Época

14 de Junho de 2021

Duração: 2h00

Observações:

- Justifique as suas respostas.
- As folhas devem permanecer agraphadas.
- As respostas a lápis não serão classificadas.
- Não escreva a vermelho.
- Não é permitida a posse de dispositivos electrónicos, sob pena de anulação da prova.
- Durante a prova não são prestados esclarecimentos sobre o enunciado.

proposta de resolução

Nome Completo:

N.º de estudante:

Turma:

Compromisso de Honra

Assinatura _____

"Tomei conhecimento, nos termos do disposto no código de conduta académica (regulamento nº25/2017, ponto 3 do anexo I) que a posse/uso de material não autorizado num teste/frequência/exame e/ou a comunicação/cópia com outra pessoa implica a anulação da prova pelo docente, a reprovação na UC no ano letivo a que reporta, a comunicação à Reitoria e o registo na pauta da UC e no meu processo individual. Em caso de reincidência, a sanção disciplinar poderá ir da suspensão temporária da frequência das atividades escolares no ISCTE até à interdição da frequência de atividades escolares por um período de até cinco anos."

(Não escreva nesta zona)

1. A Cor+ pretende planear a próxima semana de produção de três das suas tintas de parede: T1, T2 e T3. O modelo em programação linear apresentado abaixo tem como objectivo maximizar o lucro (em Euros), onde as variáveis de decisão, x_i , representam os litros a produzir da tinta T_i , $i=1, 2, 3$. As restrições 1 e 2 referem-se, respectivamente, à disponibilidade de ingrediente base e diluente (em litros). A penúltima restrição traduz uma condição do mercado. A última restrição diz respeito a um compromisso assumido com clientes.

$$\text{Max } Z = 4,05 x_1 + 4,90 x_2 + 3,95 x_3$$

$$\text{s.a.: } 0,2 x_1 + 0,6 x_2 + 0,8 x_3 \leq 12000$$

$$0,1 x_1 + 0,15 x_2 + 0,1 x_3 \leq 3500$$

$$x_1 - x_3 \geq 0$$

$$x_2 \geq 7000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ingrediente base (l)

diluente (l)

cond. de mercado

comprom. com clientes

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

Célula de Objetivo

Nome	Valor Original	Final Valor
Lucro	0	133525

Células de Variável

Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
x1	24500	0	4,05	1E+30	0,1
x2	7000	0	4,9	1,175	1E+30
x3	0	-0,1	3,95	0,1	1E+30

Restrições

Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
Ingrediente Base	9100	0	12000	1E+30	2900
Diluente	3500	40,5	3500	1450	2450
Cond. Mercado	24500	0	0	24500	1E+30
Comprom. Cli.	7000	-1,175	7000	9666,667	7000

- a) [1,5] Indique o plano óptimo de produção (quantidades óptimas a produzir) e o lucro total da Cor+.

quantidades a produzir (plano óptimo) na próxima semana:
 $\begin{cases} x_1 = 24500 : 24500 \text{ l de tinta T1} \\ x_2 = 7000 : 7000 \text{ l " " T2} \\ x_3 = 0 : \text{não produzida tinta T3} \end{cases}$
 lucro total máximo na próxima semana: €133.525
 (coluna Final valor, tabela célula de objectivo)

- b) [1,25] Para este plano de produção, o que poderá dizer em relação à utilização do ingrediente base e do diluente? Qual a folga em relação à disponibilidade de cada um destes dois recursos? E em relação à última restrição, o que poderá dizer quanto ao desvio do compromisso assumido com os clientes? Justifique.

- Ingrediente base (rest. 1): são usados 9.100 l (Final valor) dos 12000 l disponíveis (Rest. lado direito), sobrando 2.900 l (folga = 12000 - 9100 = 2900).
- Diluente (rest. 2): é usada a totalidade, ou seja, 3500 l (Final valor = Rest. lado direito = 3500), sendo portanto nula a folga.
- Compromisso com clientes (rest. 4): são produzidos 7000 l de tinta T2 (Final valor = 7000), ou seja, a quantidade mínima exigida desta tinta (Rest. lado direito = 7000), pelo que não há desvio.

- c) [1,25] O responsável pela elaboração do modelo em programação linear recebeu uma nova estimativa para o lucro da tinta T2, que sofreu um aumento de €0,10 por cada litro. De que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.

coeficiente da variável x_2 na f.o.: $c_2 = 4,9$ passa a $c_2^N = 4,9 + 0,1$
 aumento de $c_2 = 0,1 \leq 1,175$ = permissível aumentar

Logo: • as quantidades a produzir não irão alterar-se.

• o lucro terá uma variação de:

$$\begin{aligned}\Delta \text{lucro} &= +0,1 \times x_2 \\ &= 0,1 \times 7000 \\ &= 700\end{aligned}$$

ou seja, o lucro ~~será~~ aumentará €700.

- d) [1,25] Verificou-se que houve um erro na contabilização do diluente e que, afinal, estão disponíveis mais 100 litros. De que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.

disponibilidade de diluente: rest. 2 (com $b_2 = 3500$)

aumento de $b_2 = 100 \leq 1450$ = permissível aumentar

Logo: • será necessário recalcular as quantidades a produzir (havendo uma pequena alteração nas quantidades não nulas)

• o preço sombra $y_2 = 40,5$ é válido, donde, o lucro terá uma variação de:

$$\begin{aligned}\Delta \text{lucro} &= +100 \times y_2 \\ &= +100 \times 40,5 \\ &= 4050\end{aligned}$$

ou seja, o lucro irá aumentar em €4050

- e) [1,25] Que recursos estão a impedir a Cor+ de obter mais lucro? Caso a Cor+ pudesse dispor de mais desses recursos, de quanto é que deveria dispor e quanto é que estaria disposta a pagar para tê-los? Justifique.

Recursos: ingrediente base (rest. 1) e diluente (rest. 2)

O diluente é o recurso que está a impedir a Cor+ de obter mais lucro, pois está a ser consumido na totalidade e o seu preço sombra é superior a zero ($y_2 = 40,5$).

Dispondo até 1450 l adicionais (permissível aumentar), a Cor+ estaria disposta a pagar até €40,50 acima do seu custo habitual, por cada litro de diluente adicional.

- f) [1,0] Após analisar os resultados do solver, o responsável pela elaboração do modelo em programação linear sugeriu que fosse feita uma revisão dos lucros unitários das tintas. Que lucros deverão ser revistos e porquê? Justifique.

Deverão ser revistos os lucros unitários das tintas T1 e T3, visto que é de apenas €0,10 o valor do permissível diminuir e aumentar do respectivo lucro unitário: notar que 0,1 é um valor muito pequeno quando comparado com os lucros unitários $c_1 = 4,05$ e $c_3 = 3,95$.

Verifica-se assim que bastará uma pequena alteração nestes lucros unitários para que o plano actual deixe de ser o ótimo (o mais lucrativo) e haja uma alteração significativa nas quantidades ótimas a produzir.

A revisão destes lucros unitários e posterior re-otimização do problema permitirão ter mais garantias de que a solução obtida será a mais lucrativa para o problema real da Cor+.

2. No próximo ciclo de produção, a GranBio poderá recorrer a três máquinas distintas para embalar 14 000kg de granola. Cada uma destas máquinas poderá laborar até 30 horas. Contudo, cada uma delas tem tempos e custos de embalamento distintos por cada quilograma, sendo os seguintes: (1)

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Tempo (segundos)	10	12	15
Custo (€)	0,03	0,05	0,01

Além disso, o tempo total de embalamento não poderá exceder as 50 horas. (2)

- a) [2,0] Sabendo que a GranBio pretende determinar a quantidade a embalar em cada máquina, apresente o modelo em programação linear que **minimiza os custos totais de embalamento**. Indique o significado das variáveis, assim como da função objectivo e das restrições.

sejam as variáveis de decisão:

x_i - quantidade de granola, em kg, a embalar na máquina i ,
 $i = 1, 2, 3$

Modelo em PL:

$$1h = 3600 \text{ seg.}$$

$$\min \text{ custo} = 0,03 x_1 + 0,05 x_2 + 0,01 x_3$$

$$\text{S.a: (1) } x_1 + x_2 + x_3 = 14.000$$

$$(2) 10 x_1 + 12 x_2 + 15 x_3 \leq 50 \times 3600 \quad (\text{tempo total de embalamento})$$

$$(3) 10 x_1 \leq 30 \times 3600$$

$$(4) 12 x_2 \leq 30 \times 3600$$

$$(5) 15 x_3 \leq 30 \times 3600$$

} tempo de embalamento em cada máquina

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{qts não negativas}$$

- b) [0,5] Considere agora que, por cada 4 kg embalados na máquina 2, devem ser embalados, pelo menos, 5 kg na máquina 3. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a).

$$4 x_3 \geq 5 x_2$$

- c) [1,0] A equipa de manutenção da GranBio detectou que a máquina 3 só poderá ser usada caso seja sujeita a uma manutenção cujo custo fixo será de €50. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a).

variável de decisão adicional:

$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{se for realizada a manutenção da máquina 3} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na f.o., será necessário somar a parcela + 50 y_3 (custo da manutenção) ficando a f.o.: $\min \text{ custo total} = 0,03x_1 + 0,05x_2 + 0,01x_3 + 50y_3$

A restrição (5) será substituída pela restrição (*)

$$15x_3 \leq 30 \times 3600 y_3$$

Nova restrição:

$$y_3 \in \{0,1\}$$

* em alternativa, poderá manter-se a rest. (5) e acrescentar a nova restrição $x_3 \leq My_3$, onde M é um valor positivo suficientemente grande

- d) [1,5] A GranBio poderá alugar o tempo não usado na máquina 1, em fracções de uma hora, originando uma receita de €10 por cada hora de aluguer. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a), de modo a minimizar os custos totais.

Seja a nova variável

$$z_1 = \text{n.º de horas alugadas da máquina 1.}$$

Na f.o., será necessário subtrair o lucro gerado pelo aluguer da máquina, ficando a f.o.:

$$\min \text{ custo} = 0,03x_1 + 0,05x_2 + 0,01x_3 - 10z_1$$

A restrição (3) terá de ser substituída por

$$10x_1 + 3600z_1 \leq 30 \times 3600$$

Nova restrição:

$$z_1 \geq 0 \text{ e inteiro}$$

3. A Electre é uma empresa que se dedica à manutenção de equipamentos electrónicos. Para o dia de amanhã, a Electre recebeu quatro pedidos de reparação de um equipamento que requer uma equipa de técnicos especializados. Para este tipo de reparação, a Electre tem disponíveis apenas três equipas de técnicos com as qualificações necessárias, localizados em diferentes centros de reparação espalhados pelo país. Cada reparação é bastante demorada e inclui o tempo de deslocação, impossibilitando que uma mesma equipa proceda a mais de uma reparação no mesmo dia. O lucro obtido com cada reparação depende da equipa que a efectuar e é o seguinte:

	Reparação 1	Reparação 2	Reparação 3	Reparação 4
Equipa 1	60	50	110	40
Equipa 2	30	90	75	50
Equipa 3	45	100	85	80

A Electre pretende determinar quais dos pedidos de reparação deve aceitar, de modo a obter o maior lucro total possível. Considere as variáveis x_{ij} iguais a 1 se a equipa i realizar a reparação j e iguais a 0 (zero) caso contrário, com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$.

- a) [0,5] Escreva a função objectivo.

$$\begin{aligned} \max \text{ Lucro} = & 60x_{11} + 50x_{12} + 110x_{13} + 40x_{14} \\ & + 30x_{21} + 90x_{22} + 75x_{23} + 50x_{24} \\ & + 45x_{31} + 100x_{32} + 85x_{33} + 80x_{34} \end{aligned}$$

- b) [0,5] Escreva a restrição relativa à Reparação 4.

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 1$$

- c) [0,5] Escreva a restrição relativa à Equipa 3.

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1$$

- d) [1,0] Suponha agora que as equipas 1 e 3 poderão realizar até duas manutenções por dia. Apresente todas as alterações ao modelo do caso inicial.

As restrições das equipas 1 e 3 passam a ser:

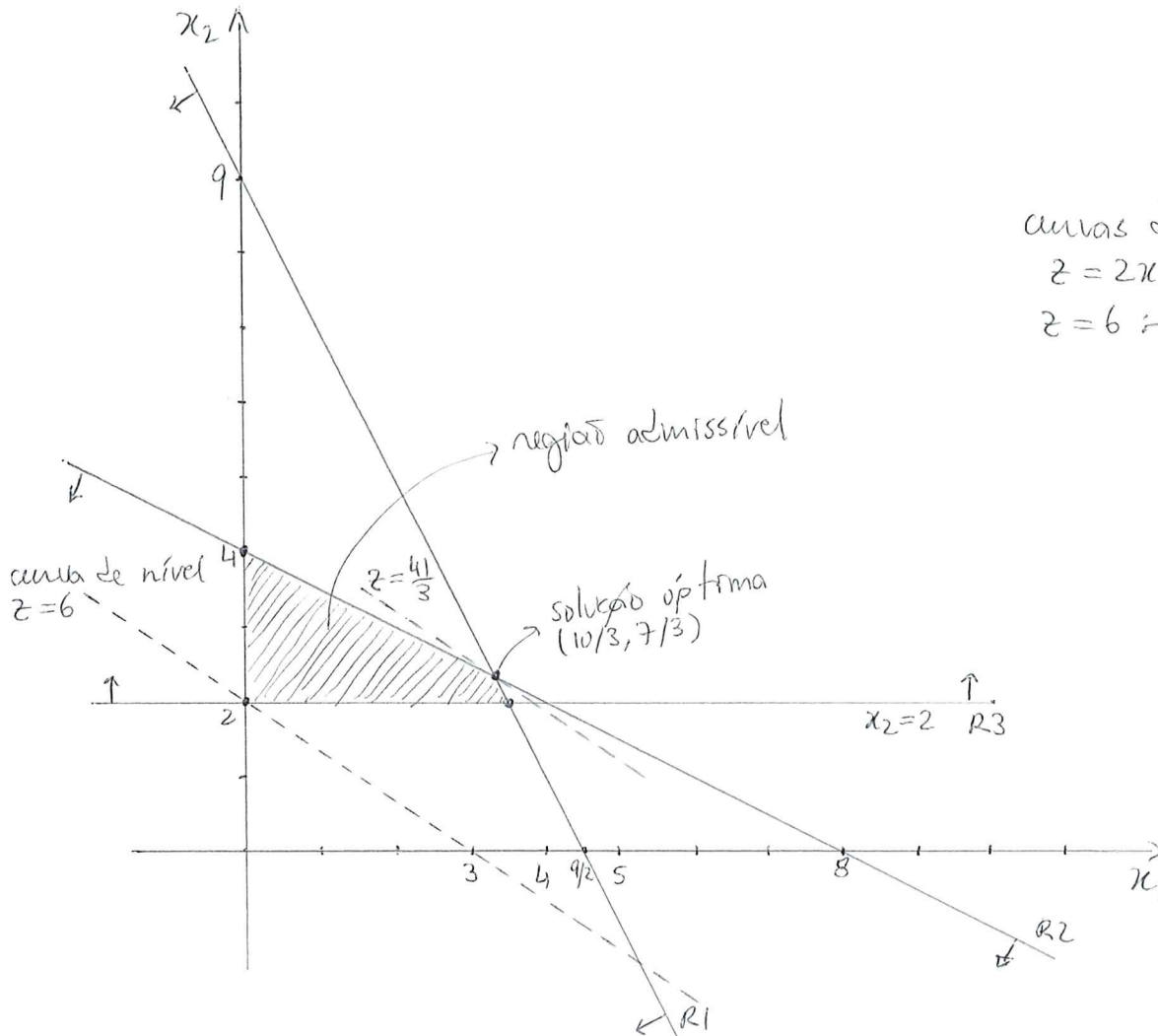
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2$$

4. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.: } 2x_1 + x_2 &\leq 9 \quad (R1) \rightarrow \text{pontos } (0, 9) \quad (9/2, 0) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \quad (R2) \rightarrow \text{pontos } (0, 4) \quad (8, 0) \\ x_2 &\geq 2 \quad (R3) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) [1,5] Resolva o problema graficamente. Justifique.



curvas de nível:

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$Z = 6 \rightarrow \text{pontos } (3, 0) \quad (0, 2)$$

solução ótima:

$$\begin{aligned} \text{restrições} & \begin{cases} R1 \\ R2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \xRightarrow{(1) = (1) - \frac{1}{2}(2)} \begin{cases} 3/2 x_1 = 5 \\ x_2 = 7/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 \\ x_2 = 7/3 \end{cases} \end{aligned}$$

valor ótimo:

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$= 2 \cdot \frac{10}{3} + 3 \cdot \frac{7}{3}$$

$$= \frac{41}{3}$$

Considere o respectivo problema inteiro, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.: } 2x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\text{ inteiros} \end{aligned}$$

(apresentados apenas tópicos de resolução)
(teriam de ser apresentados mais detalhes, nomeadamente esboços das resoluções gráficas dos sub-problemas)

b) [2,0] Resolva o problema inteiro usando o método Branch-and-Bound. Apresente todos os cálculos e justificações necessárias.

Seja PI o problema inteiro

• Relaxação em programação (RPL) resolvida na alínea a):

$$x_1 = 10/3, x_2 = 7/3 \Rightarrow z = 41/3$$

• Problema de maximização: $UB = 13 \leq VO(RPL) = \frac{41}{3} = 13 + \frac{2}{3}$
 $LB = -\infty$

• $x_1 = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow$ ramificar x_1

SP1: à RPL adicionar $x_1 \leq 3$

SP2: à RPL adicionar $x_1 \geq 4$

• Resolver SP1

$$\begin{aligned} \text{rest. } x_1 &= 3 \\ \text{activas } R_2 &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5/2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

• $x_2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow$ ramificar x_2

SP3: ao SP1 adicionar $x_2 \leq 2$

SP4: ao SP1 adicionar $x_2 \geq 3$

• Resolver SP3

$$\begin{aligned} \text{rest. } x_1 &= 3 \\ \text{activas } x_2 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow z = 12$$

Solução admissível para PI

$$z(3,2) = 12 > LB = -\infty$$

Actualizar $LB = z(3,2) = 12$

Terminar pesquisa neste ramo (*)

• Resolver SP4

$$\begin{aligned} \text{rest. } x_1 &= 2 \\ \text{activas } R_2 &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 13 \end{aligned}$$

Solução admissível para PI

$$z(2,3) = 13 > LB = 12$$

Actualizar $LB = z(2,3) = 13$

Terminar pesquisa neste ramo (**)

• Resolver SP2

não existem soluções admissíveis

$\Rightarrow$ Problema impossível

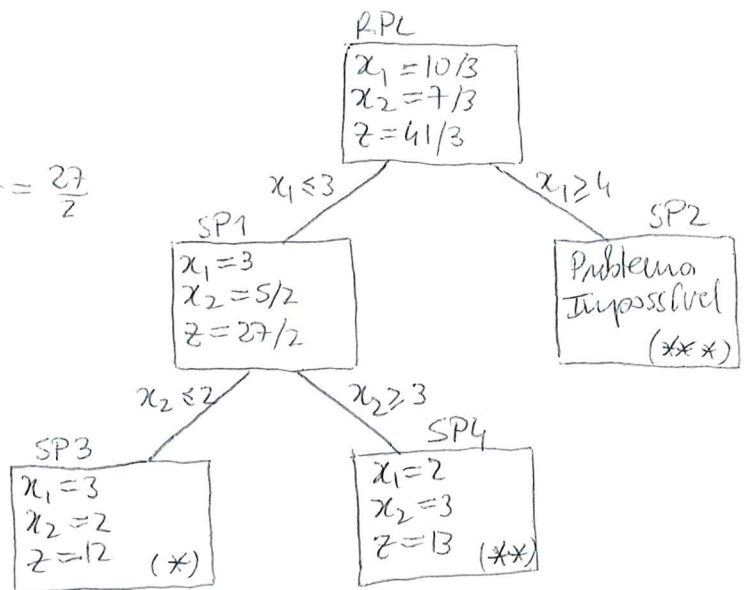
Terminar pesquisa neste ramo (***)

• Já não existem sub-problemas por analisar

Terminar a aplicação do algoritmo Branch-and-Bound

A solução ótima para PI é a melhor solução inteira encontrada:

$$x_1 = 2, x_2 = 3, \text{ com valor ótimo } z = 13$$



5. De modo a expandir o seu negócio, a Fresh pretende mudar-se para um novo centro de produção. A Fresh deseja instalar-se numa localização central em relação aos quatro maiores retalhistas que abastece (A, B, C e D), tendo em consideração a procura anual esperada de cada um deles (medida pelo número esperado de carregamentos). Além disso, a Fresh quer ainda situar-se a não mais de 30 quilómetros do retalhista C. A Fresh elaborou o modelo seguinte, onde x e y representam, respectivamente, as coordenadas X e Y do novo centro de produção:

$$\text{Min distância} = 120\sqrt{(x-90)^2 + (y-75)^2} + 180\sqrt{(x-15)^2 + (y-20)^2} + 240\sqrt{(x-100)^2 + (y-25)^2} + 130\sqrt{(x-35)^2 + (y-80)^2}$$

$$\text{s.a.: } \sqrt{(x-100)^2 + (y-25)^2} \leq 30$$

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

Objective Cell		
Name	Original Value	Final Value
Dist. Total	54 648,85	30 282,51

Variable Cells		
Name	Final Value	Reduced Gradient
x	74,87	0
y	41,39	0

Constraints		
Name	Final Value	Lagrange Multiplier
dist. Máxima	30,00	-15,05

Complete as frases seguintes:

- a) [0,5] A distância total anual estimada é de 30.282,51 km.
 b) [0,5] O novo centro de produção deverá localizar-se em $(x;y) = (74,87; 41,39)$.
 c) [0,5] Se a Fresh pretender situar-se a não mais de 25 km do retalhista C, a distância total anual estimada terá um aumento aproximado de 75 km.

$$\left(\begin{array}{l} 75 \approx (-5) \times (-15,05) \\ 30 - 5 = 25 \text{ km} \end{array} \right)$$