

Optimização para Ciência de Dados

2020/2021

2.º Semestre

2ª Época

14 de Junho de 2021

Duração: 2h00

Observações:

- Justifique as suas respostas.
- As folhas devem permanecer agrafadas.
- As respostas a lápis não serão classificadas.
- Não escreva a vermelho.
- Não é permitida a posse de dispositivos electrónicos, sob pena de anulação da prova.
- Durante a prova não são prestados esclarecimentos sobre o enunciado.

Nome Completo:

N.º de estudante:

Turma:

Compromisso de Honra

Assinatura _____

"Tomei conhecimento, nos termos do disposto no código de conduta académica (regulamento nº25/2017, ponto 3 do anexo I) que a posse/uso de material não autorizado num teste/frequência/exame e/ou a comunicação/cópia com outra pessoa implica a anulação da prova pelo docente, a reprovação na UC no ano letivo a que reporta, a comunicação à Reitoria e o registo na pauta da UC e no meu processo individual. Em caso de reincidência, a sanção disciplinar poderá ir da suspensão temporária da frequência das atividades escolares no ISCTE até à interdição da frequência de atividades escolares por um período de até cinco anos."

(Não escreva nesta zona)

1. A Cor+ pretende planejar a próxima semana de produção de três das suas tintas de parede: **T1, T2 e T3**. O modelo em programação linear apresentado abaixo tem como objectivo maximizar o lucro (em Euros), onde as variáveis de decisão, x_i , representam os litros a produzir da tinta T_i , $i=1, 2, 3$. As restrições 1 e 2 referem-se, respectivamente, à disponibilidade de ingrediente base e diluente (em litros). A penúltima restrição traduz uma condição do mercado. A última restrição diz respeito a um compromisso assumido com clientes.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4,05 x_1 + 4,90 x_2 + 3,95 x_3 \\ \text{s.a.: } &0,2 x_1 + 0,6 x_2 + 0,8 x_3 \leq 12000 \\ &0,1 x_1 + 0,15 x_2 + 0,1 x_3 \leq 3500 \\ &x_1 - x_3 \geq 0 \\ &x_2 \geq 7000 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

| Célula de Objetivo | | |
|--------------------|----------------|-------------|
| Nome | Valor Original | Final Valor |
| Lucro | 0 | 133525 |

| Células de Variável | | | | | |
|---------------------|-------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Nome | Final Valor | Reduzido Custo | Objetivo Coeficiente | Permissível Aumentar | Permissível Diminuir |
| x1 | 24500 | 0 | 4,05 | 1E+30 | 0,1 |
| x2 | 7000 | 0 | 4,9 | 1,175 | 1E+30 |
| x3 | 0 | -0,1 | 3,95 | 0,1 | 1E+30 |

| Restrições | | | | | |
|------------------|-------------|--------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| Nome | Final Valor | Sombra Preço | Restrição Lado Direito | Permissível Aumentar | Permissível Diminuir |
| Ingrediente Base | 9100 | 0 | 12000 | 1E+30 | 2900 |
| Diluente | 3500 | 40,5 | 3500 | 1450 | 2450 |
| Cond. Mercado | 24500 | 0 | 0 | 24500 | 1E+30 |
| Comprom. Cli. | 7000 | -1,175 | 7000 | 9666,667 | 7000 |

- a) [1,5] Indique o plano óptimo de produção (quantidades óptimas a produzir) e o lucro total da Cor+.

- b) [1,25] Para este plano de produção, o que poderá dizer em relação à utilização do ingrediente base e do diluente? Qual a folga em relação à disponibilidade de cada um destes dois recursos? E em relação à última restrição, o que poderá dizer quanto ao desvio do compromisso assumido com os clientes? Justifique.

- c) [1,25]** O responsável pela elaboração do modelo em programação linear recebeu uma nova estimativa para o lucro da tinta T2, que sofreu um aumento de €0,10 por cada litro. De que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.
- d) [1,25]** Verificou-se que houve um erro na contabilização do diluente e que, afinal, estão disponíveis mais 100 litros. De que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.
- e) [1,25]** Que recursos estão a impedir a Cor+ de obter mais lucro? Caso a Cor+ pudesse dispor de mais desses recursos, de quanto é que deveria dispor e quanto é que estaria disposta a pagar para tê-los? Justifique.
- f) [1,0]** Após analisar os resultados do solver, o responsável pela elaboração do modelo em programação linear sugeriu que fosse feita uma revisão dos lucros unitários das tintas. Que lucros deverão ser revistos e porquê? Justifique.

2. No próximo ciclo de produção, a GranBio poderá recorrer a três máquinas distintas para embalar 14 000kg de granola. Cada uma destas máquinas poderá laborar até 30 horas. Contudo, cada uma delas tem tempos e custos de embalagem distintos por cada quilograma, sendo os seguintes:

| | Máquina 1 | Máquina 2 | Máquina 3 |
|------------------|-----------|-----------|-----------|
| Tempo (segundos) | 10 | 12 | 15 |
| Custo (€) | 0,03 | 0,05 | 0,01 |

Além disso, o tempo total de embalagem não poderá exceder as 50 horas.

- a) [2,0] Sabendo que a GranBio pretende determinar a quantidade a embalar em cada máquina, apresente o modelo em programação linear que **minimiza os custos totais de embalagem**. Indique o significado das variáveis, assim como da função objectivo e das restrições.

- b) [0,5] Considere agora que, por cada 4 kg embalados na máquina 2, devem ser embalados, pelo menos, 5 kg na máquina 3. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a).

c) [1,0] A equipa de manutenção da GranBio detectou que a máquina 3 só poderá ser usada caso seja sujeita a uma manutenção cujo custo fixo será de €50. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em **a)**.

d) [1,5] A GranBio poderá alugar o tempo não usado na máquina 1, em fracções de uma hora, originando uma receita de €10 por cada hora de aluguer. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em **a)**, de modo a minimizar os custos totais.

3. A Electre é uma empresa que se dedica à manutenção de equipamentos electrónicos. Para o dia de amanhã, a Electre recebeu quatro pedidos de reparação de um equipamento que requer uma equipa de técnicos especializados. Para este tipo de reparação, a Electre tem disponíveis apenas três equipas de técnicos com as qualificações necessárias, localizados em diferentes centros de reparação espalhados pelo país. Cada reparação é bastante demorada e inclui o tempo de deslocação, impossibilitando que uma mesma equipa proceda a mais de uma reparação no mesmo dia. O lucro obtido com cada reparação depende da equipa que a efectuar e é o seguinte:

| | Reparação 1 | Reparação 2 | Reparação 3 | Reparação 4 |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Equipa 1 | 60 | 50 | 110 | 40 |
| Equipa 2 | 30 | 90 | 75 | 50 |
| Equipa 3 | 45 | 100 | 85 | 80 |

A Electre pretende determinar quais dos pedidos de reparação deve aceitar, de modo a obter o maior lucro total possível. Considere as variáveis x_{ij} iguais a 1 se a equipa i realizar a reparação j e iguais a 0 (zero) caso contrário, com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$.

a) [0,5] Escreva a função objectivo.

b) [0,5] Escreva a restrição relativa à Reparação 4.

c) [0,5] Escreva a restrição relativa à Equipa 3.

d) [1,0] Suponha agora que as equipas 1 e 3 poderão realizar até duas manutenções por dia. Apresente todas as alterações ao modelo do caso inicial.

4. Considere o seguinte problema:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a.: } 2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) [1,5] Resolva o problema graficamente. Justifique.

Considere o respectivo problema inteiro, ou seja:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a.: } 2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ inteiros}$$

b) [2,0] Resolva o problema inteiro usando o método Branch-and-Bound. Apresente todos os cálculos e justificações necessárias.

5. De modo a expandir o seu negócio, a Fresh pretende mudar-se para um novo centro de produção. A Fresh deseja instalar-se numa localização central em relação aos quatro maiores retalhistas que abastece (A, B, C e D), tendo em consideração a procura anual esperada de cada um deles (medida pelo número esperado de carregamentos). Além disso, a Fresh quer ainda situar-se a não mais de 30 quilómetros do retalhista C. A Fresh elaborou o modelo seguinte, onde x e y representam, respectivamente, as coordenadas X e Y do novo centro de produção:

$$\text{Min distância} = 120\sqrt{(x - 90)^2 + (y - 75)^2} + 180\sqrt{(x - 15)^2 + (y - 20)^2} + 240\sqrt{(x - 100)^2 + (y - 25)^2} + 130\sqrt{(x - 35)^2 + (y - 80)^2}$$

$$\text{s.a.: } \sqrt{(x - 100)^2 + (y - 25)^2} \leq 30$$

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

| Objective Cell | | |
|----------------|----------------|-------------|
| Name | Original Value | Final Value |
| Dist. Total | 54 648,85 | 30 282,51 |

| Variable Cells | | |
|----------------|-------------|------------------|
| Name | Final Value | Reduced Gradient |
| x | 74,87 | 0 |
| y | 41,39 | 0 |

| Constraints | | |
|--------------|-------------|---------------------|
| Name | Final Value | Lagrange Multiplier |
| dist. Máxima | 30,00 | -15,05 |

Complete as frases seguintes:

- [0,5]** A distância total anual estimada é de _____ km.
- [0,5]** O novo centro de produção deverá localizar-se em _____.
- [0,5]** Se a Fresh pretender situar-se a não mais de _____ km do retalhista C, a distância total anual estimada terá um aumento aproximado de 75 km.

RASCUNHO

RASCUNHO