

Optimização para Ciência de Dados

2020/2021

2.º Semestre

1ª Época: Teste/Exame

1 de Junho de 2021

Duração: 2h00

Observações:

- Justifique as suas respostas.
- Não destaque as folhas do teste.
- As respostas a lápis não serão classificadas.
- Não escreva a vermelho.
- Não é permitido o uso de dispositivos electrónicos.
- Durante a prova não são prestados esclarecimentos sobre o enunciado.

proposta de resolução

Nome Completo:

N.º de estudante:

Turma:

(Não escreva nesta zona)

1. A GranBio pretende planejar o próximo ciclo de produção dos seus quatro tipos de granola: G_1 , G_2 , G_3 e G_4 . Para tal, o departamento de gestão da produção desenvolveu o modelo em programação linear apresentado abaixo, com o objectivo de maximizar o lucro (em €). As variáveis de decisão, x_i , representam os quilogramas a produzir da granola G_i , $i=1, 2, 3, 4$. A primeira restrição refere-se ao tempo de laboração disponível (minutos). A segunda restrição está relacionada com a disponibilidade de um ingrediente especial (kg). A terceira restrição garante a regra de produção exigida pelo departamento de vendas. A última restrição representa um compromisso assumido com clientes.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4$$

$$\text{s.a.: } 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,15x_3 + 0,1x_4 \leq 1600$$

$$0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,15x_4 \leq 2000$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 4000$$

$$x_3 \geq 6000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

tempo lab. (min.)

ingred. (kg)

regra prod.

comprom. clientes

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

Célula de Objectivo		
Nome	Valor Original	Valor Final
Lucro	0	35000

Células de Variável

Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
x1	2000	0	4	1	1E+30
x2	0	-1	1	1	1E+30
x3	6000	0	2	1,5	1E+30
x4	5000	0	3	1E+30	0,5

Restrições

Nome	Valor Final	Sombra Preço	Constraint R.H. Side	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
Laboração (min.)	1600	30	1600	166,6666667	500
Ingrediente (kg)	1750	0	2000	1E+30	250
Regra Prod.	4000	-1	4000	2000	5000
Comprom. Cli.	6000	-1,5	6000	2000	2000

- a) [1,5] Indique o plano óptimo de produção (quantidades óptimas a produzir) e o lucro total para o próximo ciclo de produção da GranBio.

Quantidades a produzir (plano óptimo):

$$\begin{cases} x_1 = 2000: & 2000 \text{ kg de granola } G_1 \\ x_3 = 6000: & 6000 \text{ kg " " } G_3 \\ x_4 = 5000: & 5000 \text{ kg " " } G_4 \\ x_2 = 0: & \text{não produzir granola } G_2 \end{cases}$$

lucro total de €35.000 (valor final, tabela célula de objectivo)

coluna
valor Final,
tabela
células de
variável

- b) [1,25] Para este plano de produção, o que poderá dizer em relação à utilização do tempo de laboração e do ingrediente especial? Qual a folga em relação à disponibilidade de cada um destes dois recursos? Justifique.

Tempo de laboração (rest. 1):

- são usados 1600 minutos (Valor Final), ou seja, a totalidade (constraint R.H. Side), logo, a folga é nula.

Ingrediente especial (rest. 2):

- são usados 1750 kg (valor final), dos 2000 kg existentes (constraint R.H. Side), logo, a folga é de 250 kg (= 2000 - 1750).

- c) [1,25] Se o lucro por quilograma da granola G_4 passar a ser €2,90, de que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.

coeficiente da variável x_4 na f.o.: $C_4 = 3$ passa a $C_4^N = 2,90$

redução de $C_4 = 0,1 \leq 0,5$ = permissível diminuir

Logo: • as quantidades a produzir não se alteram

• o lucro terá uma variação de:

$$\begin{aligned}\Delta \text{lucro} &= -0,1 \times x_4 \\ &= -0,1 \times 5000 \\ &= -500\end{aligned}$$

ou seja, o lucro diminui €500

- d) [1,25] Caso o tempo de laboração disponível seja reduzido em 60 minutos devido à avaria numa das máquinas, de que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.

tempo de laboração: rest. 1, é restrição ativa (a folga é nula)

termo independente da rest. 1: $b_1 = 1600$

redução de $b_1 = 60 \leq 500$ = permissível diminuir

Logo: • será necessário re-optimizar para determinar as quantidades a produzir (haverá uma pequena alteração nas quantidades não nulas)

• o preço sombra $y_1 = 30$ é válido e o lucro terá uma variação de: $\Delta Z = -60 \times y_1 = -60 \times 30 = -1800$

ou seja, o lucro diminui €1800

- e) [1,25] Caso um dos lotes (de 100 kg) do ingrediente especial esteja impróprio para usar na produção, de que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.

ingrediente especial: rest. 2, é restrição não ativa, sendo usado

1750 kg

redução de b_2 , de $b_2 = 2000$ para $b_2^N = 2000 - 100 = 1900$

$b_2^N = 1900 \geq 1750$ = quantidade usada na produção ótima.

Logo, as quantidades a produzir não irão alterar-se e o lucro irá manter-se (apenas irá alterar-se o valor da variável de folga da rest. 2).

- f) [1,0] Que alteração teria de ser feita ao modelo de modo a que existisse mais do que um plano ótimo de produção? Justifique.

Para que exista mais do que um plano ótimo de produção, (i.e., para que existam soluções óptimas múltiplas), algum dos coeficientes das variáveis na f.o. terá de aumentar ~~ou diminuir~~ exatamente o valor da ~~ou~~ ser permissível aumentar, ou diminuir exatamente o seu valor de permissível diminuir.

Por exemplo, para a granola G_1 , teria de aumentar-se o seu lucro unitário em €1, i.e., passando-o de $C_1 = 4$ para $C_1^N = 4 + 1 = 5$.

2. A Fresh produz os sumos S1, S2 e S3 a partir de um concentrado de fruta. Devido a contratempos vários, na próxima semana só estarão disponíveis 1500 litros do concentrado e 30 horas para processamento. Apesar disso, a Fresh pretende manter a regra de produção que estabelece que o sumo S2 tem de representar, pelo menos, 50% da produção total. Na próxima semana, a Fresh tem €1000 para suportar os custos de processamento e de aquisição do concentrado de fruta, sendo que cada hora de processamento efectivamente usada custa €9 e que cada litro de concentrado de fruta custa €0,50. A quantidade necessária do concentrado de fruta, o tempo de processamento e o preço de venda por cada litro de sumo, assim como a projecção máxima de vendas, são dados na tabela seguinte:

Sumo	S1	S2	S3	disponível	custo
Concentrado (litros)	0,9	0,3	0,5	1500 l	€0,50/l
Tempo processamento (minutos)	0,1	0,7	0,5	30h	€9/h
Preço de venda (€)	1,80	1,10	1,50		
Projecção de vendas (litros)	900	2000	1400		

- a) [2,5] Apresente o modelo em programação linear que permite determinar o plano de produção da Fresh que **maximiza a receita**. Indique o significado das variáveis, assim como da função objectivo e das restrições.

variáveis de decisão:

x_i - quantidade, em litros, a produção do sumo S_i , na próxima semana, $i=1,2,3$

Modelo em PL:

$$\max \text{ receita} = 1,80x_1 + 1,10x_2 + 1,50x_3$$

$$\text{s.a: } x_2 \geq 0,5 (x_1 + x_2 + x_3) \quad (1) \quad [\text{ou } x_2 \geq x_1 + x_3]$$

$$0,5 (0,9x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3) + \frac{9}{60} (0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,5x_3) \leq 1000 \quad (2)$$

$$0,9x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 \leq 1500 \quad (\text{concentrado disponível}) \quad (3)$$

$$0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,5x_3 \leq 30 \times 60 \quad (\text{tempo proces. disponível}) \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \leq 900 \\ x_2 \leq 2000 \\ x_3 \leq 1400 \end{array} \right\} \text{projecção máxima de} \\ \text{vendas de cada sumo}$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1,2,3$$

- b) [1,0] Suponha que a Fresh determinou que a produção do sumo S1 só deverá ocorrer caso sejam produzidos 500 ou mais litros deste sumo. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a).

novas restrições a acrescentar ao modelo:

$$x_1 \geq 500y$$

$$x_1 \leq My$$

$$y \in \{0,1\}$$

onde M é um valor positivo suficientemente grande

- c) [1,5] Suponha que o concentrado de fruta tem de ser adquirido em embalagens de 100 litros, mantendo-se o limite a adquirir, e que cada embalagem custa €50. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em a).

nova variável a acrescentar:

z - nº de lotos (de 100 l) de concentrado de fruta a usar

A restrição (3) tem de ser alterada para:

$$0,9x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 \leq 100z$$

Na restrição (2), a parcela $0,5(0,9x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3)$

tem de ~~ser~~ ser alterada para:

50 z (custo com a aquisição dos lotos de concentrado de fruta)

passando assim a restrição (2) a ser:

$$50z + \frac{9}{60}(0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,5x_3) \leq 1000$$

Acrescentar as novas restrições:

$$z \leq 15 \quad (\text{Disponibilidade mantém-se em}$$

$$1500 \text{ l} = 15 \times 100 = 15 \text{ } \times \text{ embalagens de } 100 \text{ l})$$

$$z \geq 0 \text{ e inteiro.}$$

3. A CAC produz acessórios para automóveis nas fábricas de Santarém e Valência. Os acessórios são depois enviados para quatro grandes centros de distribuição situados em Barcelona, Nantes, Milão e Frankfurt. Na tabela seguinte são apresentados os custos unitários de transporte entre cada fábrica e cada centro de distribuição, as capacidades das fábricas e a procura em cada centro de distribuição:

Fábrica	Centro de distribuição				Capacidade
	Barcelona	Nantes	Milão	Frankfurt	
Santarém	13	16	11	18	1250
Valência	10	15	9	19	750
Procura	175	325	480	950	

O responsável pela cadeia de abastecimento da CAC pretende determinar que quantidade transportar entre cada fábrica e cada centro de distribuição minimizando o custo total de transporte, mas garantindo que não são excedidas as capacidades disponíveis e que são cumpridas as procuras dos clientes. Considere as variáveis x_{ij} = número de acessórios a transportar entre a fábrica i e o centro de distribuição j , onde $i = 1$ representa Santarém, $i = 2$ representa Valência, $j = 1$ representa Barcelona e assim sucessivamente.

- a) [0,5] Escreva a função objectivo.

$$\begin{aligned} \min \text{ custo} = & 13x_{11} + 16x_{12} + 11x_{13} + 18x_{14} \\ & + 10x_{21} + 15x_{22} + 9x_{23} + 19x_{24} \end{aligned}$$

- b) [0,5] Escreva a restrição relativa à quantidade enviada a partir de Santarém.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1250$$

- c) [0,5] Escreva a restrição relativa ao cumprimento da procura em Milão.

$$x_{13} + x_{23} \geq 480$$

$$(\text{ou } x_{13} + x_{23} = 480)$$

d) [1,0] Suponha agora que, a partir da fábrica de Santarém, só poderão ser enviados acessórios para, no máximo, dois dos centros de distribuição. Apresente todas as alterações ao modelo do caso inicial.

novas restrições (mantendo as x_{ij} já definidas):

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se a fábrica de Santarém enviar acessórios para o centro de distribuição } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad j=1,2,3,4$$

Adicionar as novas restrições:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &\leq 1250 y_1 \\ x_{12} &\leq 1250 y_2 \\ x_{13} &\leq 1250 y_3 \\ x_{14} &\leq 1250 y_4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{garantir que } x_{ij} \text{ só pode ser } > 0 \\ &\text{se } y_j = 1 \\ &* \end{aligned}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2 \quad (\text{enviar acessórios para, no máximo, 2 centros de distribuição})$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j=1,2,3,4$$

* em vez de $x_{ij} \leq 1250 y_j, j=1,2,3,4$ pode escrever-se

$$x_{ij} \leq M y_j, \quad j=1,2,3,4$$

com M um n.º positivo suficientemente grande.

4. Considere o seguinte problema:

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.: } 2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (R_1) \rightarrow \text{pontos } (0,8) \text{ e } (4,0)$$

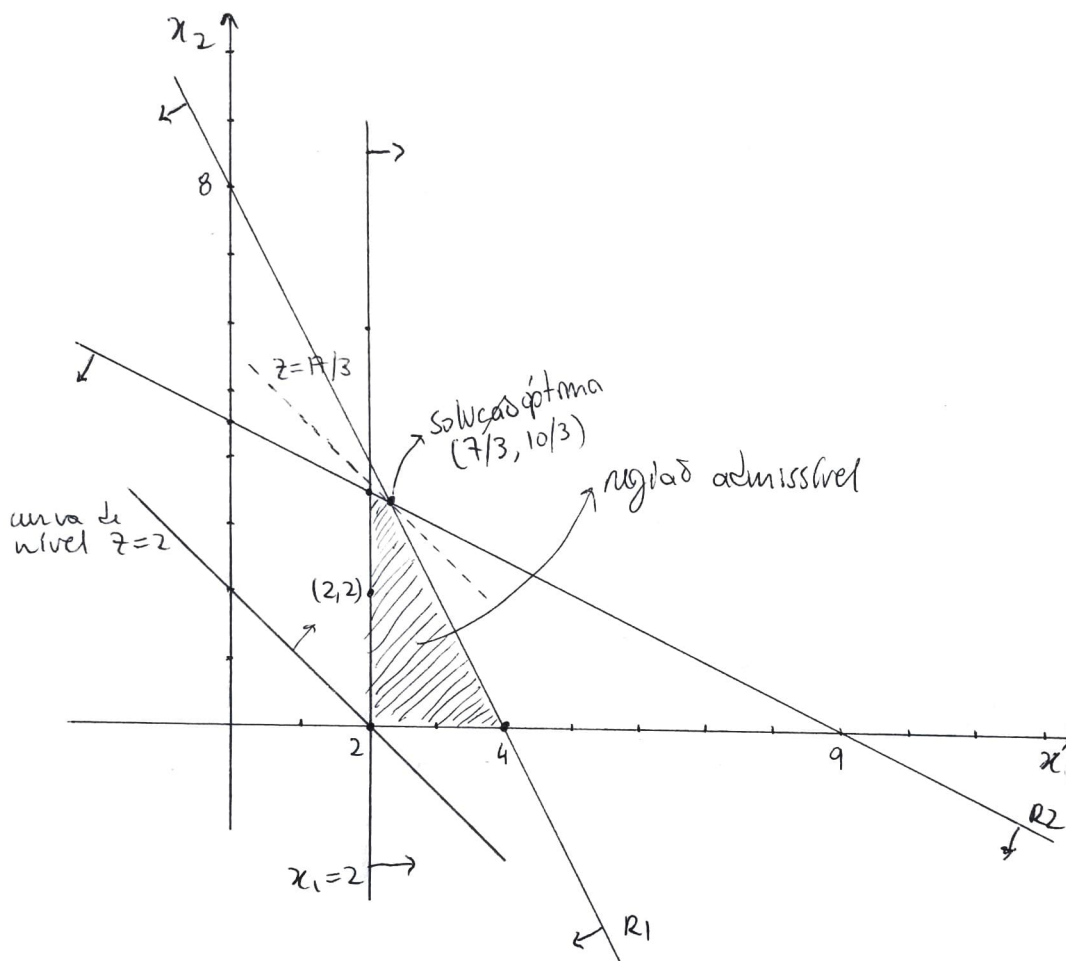
$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad (R_2) \rightarrow \text{" } (0,4.5) \text{ } (9,0)$$

$$x_1 \geq 2 \quad (R_3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

curva de nível $z=2 \rightarrow$ pontos $(0,2)$ e $(2,0)$

a) [1,5] Resolva o problema graficamente. Justifique.



solução ótima:

$$(1) = (4) - \frac{1}{2}(2)$$

$$\begin{aligned} \text{restrições} & \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3/2 x_1 = 7/2 \\ x_1 = 7/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7/3 \\ x_2 = 10/3 \end{cases} \end{aligned}$$

valor ótimo:

$$z = x_1 + x_2$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{10}{3}$$

$$= \frac{17}{3}$$

Considere o respectivo problema inteiro, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a.: } 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\text{ inteiros} \end{aligned}$$

b) [0,5] Indique uma solução admissível para o problema inteiro. Justifique.

ponto (2,2) :

- $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$ são ambos inteiros
- (2,2) está dentro da região admissível da relaxação em programação linear, de acordo com a representação gráfica feita em a)

Logo, o ponto (2,2) é uma solução admissível para o problema inteiro

c) [1,0] Indique um limite superior e um limite inferior para o valor ótimo do problema inteiro.

Justifique. Seja PI o problema inteiro e RPL a sua relaxação em PL.

Dado que o problema PI é de maximização:

- o valor ótimo da relaxação em PL é um limite superior para o valor ótimo do problema PI, donde:

$$UB = V(RPL) = \frac{17}{3}, \text{ ou seja, } VO(PI) \leq \frac{17}{3}$$

- o valor de uma solução admissível (qualquer) para PI é um limite inferior para o valor ótimo do problema PI, donde:

$$LB = V(\text{solução admissível de b)})$$

$$= V(2,2) = 2+2 = 4$$

$$\text{ou seja, } 4 \leq VO(PI)$$

$$(\text{conclusão: } 4 \leq VO(PI) \leq \frac{17}{3})$$

d) [0,5] A solução que indicou em b) é ótima? Justifique.

A solução admissível para PI indicada em b) ^(2,2) tem valor

$$Z = 2+2 = 4$$

Dado que $4 < UB = \frac{17}{3}$ (obtido em c)), então não se pode concluir sobre se (2,2) é ou não a solução ótima de PI.

Mesmo observando que os coeficientes das variáveis x_1 e x_2 na f.v. são ambos inteiros ($c_1 = 1$ e $c_2 = 1$), e que, portanto, o valor de qualquer solução admissível para PI será também um valor inteiro, apenas sabemos que $VO(PI) \leq 5$ (notar que $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$), pelo que também não é possível concluir se (2,2) é a solução ótima de PI, pois poderá existir uma solução inteira de valor 5.

5. Um investidor está a considerar três tipos de acções nas quais investir com um orçamento fixo. O retorno anual esperado de cada tipo de acção é de 10%, 11% e 9%. Este investidor pretende minimizar o risco do investimento (medido através da variância-covariância), mas garantindo-lhe um retorno total anual esperado de pelo menos 10%. A fim de determinar a proporção do montante total a investir em cada tipo de acção, representada pelas variáveis x_i , $i=1,2,3$, este investidor elaborou o modelo seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Min Risco} &= 0,021 x_1^2 + 0,070 x_2^2 + 0,003 x_3^2 + 2 * 0,018 x_1 x_2 - 2 * 0,003 x_1 x_3 + 2 * 0,006 x_2 x_3 \\ \text{s.a.: } &0,10 x_1 + 0,11 x_2 + 0,09 x_3 \geq 0,10 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

Objective Cell		
Name	Original Value	Final Value
Risco	0	0,0143

Variable Cells			
Name	Final Value	Reduced Gradient	
x1	0,5046	0	
x2	0,2477	0	
x3	0,2477	0	

Constraints		
Name	Final Value	Lagrange Multiplier
Retorno	0,1	2,7193
Investimento	1	-0,2433

Complete as frases seguintes:

- a) [0,5] Este investidor deverá aplicar 50,46 % nas acções do tipo 1, 24,77 % nas acções do tipo 2 e 24,77 % nas acções do tipo 3.
- b) [0,5] O risco total esperado deste investimento é de 0,0143.
- c) [0,5] Caso o investidor pretenda um retorno total anual esperado de pelo menos 11%, o risco total esperado terá um aumento aproximado de 0,027193.

$$(\text{= } 0,01 \times 2,7193)$$

$$11\% = 10\% + 1\%$$

$$0,11 = 0,10 + 0,01$$