

## Optimização para Ciência de Dados

2020/2021

2.º Semestre

1ª Época: Teste/Exame

1 de Junho de 2021

Duração: 2h00

---

### Observações:

- Justifique as suas respostas.
- Não destaque as folhas do teste.
- As respostas a lápis não serão classificadas.
- Não escreva a vermelho.
- Não é permitido o uso de dispositivos electrónicos.
- Durante a prova não são prestados esclarecimentos sobre o enunciado.

---

**Nome Completo:**

**N.º de estudante:**

**Turma:**

---

(Não escreva nesta zona)

1. A GranBio pretende planear o próximo ciclo de produção dos seus quatro tipos de granola:  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$ . Para tal, o departamento de gestão da produção desenvolveu o modelo em programação linear apresentado abaixo, com o objectivo de maximizar o lucro (em €). As variáveis de decisão,  $x_i$ , representam os quilogramas a produzir da granola  $G_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ . A primeira restrição refere-se ao tempo de laboração disponível (minutos). A segunda restrição está relacionada com a disponibilidade de um ingrediente especial (kg). A terceira restrição garante a regra de produção exigida pelo departamento de vendas. A última restrição representa um compromisso assumido com clientes.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ \text{s.a.: } &0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,15x_3 + 0,1x_4 \leq 1600 \\ &0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,15x_4 \leq 2000 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 = 4000 \\ &x_3 \geq 6000 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

Célula de Objetivo

Nome	Valor Original	Valor Final
Lucro	0	35000

Células de Variável

Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
x1	2000	0	4	1	1E+30
x2	0	-1	1	1	1E+30
x3	6000	0	2	1,5	1E+30
x4	5000	0	3	1E+30	0,5

Restrições

Nome	Valor Final	Sombra Preço	Constraint R.H. Side	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
Laboração (min.)	1600	30	1600	166,6666667	500
Ingrediente (kg)	1750	0	2000	1E+30	250
Regra Prod.	4000	-1	4000	2000	5000
Comprom. Cli.	6000	-1,5	6000	2000	2000

- a) [1,5] Indique o plano óptimo de produção (quantidades óptimas a produzir) e o lucro total para o próximo ciclo de produção da GranBio.

- b) [1,25] Para este plano de produção, o que poderá dizer em relação à utilização do tempo de laboração e do ingrediente especial? Qual a folga em relação à disponibilidade de cada um destes dois recursos? Justifique.

- c) [1,25]** Se o lucro por quilograma da granola  $G_4$  passar a ser €2,90, de que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.
- d) [1,25]** Caso o tempo de laboração disponível seja reduzido em 60 minutos devido à avaria numa das máquinas, de que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.
- e) [1,25]** Caso um dos lotes (de 100 kg) do ingrediente especial esteja impróprio para usar na produção, de que forma as quantidades a produzir e o lucro irão alterar-se? Justifique.
- f) [1,0]** Que alteração teria de ser feita ao modelo de modo a que existisse mais do que um plano óptimo de produção? Justifique.

2. A Fresh produz os sumos S1, S2 e S3 a partir de um concentrado de fruta. Devido a contratempos vários, na próxima semana só estarão disponíveis 1500 litros do concentrado e 30 horas para processamento. Apesar disso, a Fresh pretende manter a regra de produção que estabelece que o sumo S2 tem de representar, pelo menos, 50% da produção total. Na próxima semana, a Fresh tem €1000 para suportar os custos de processamento e de aquisição do concentrado de fruta, sendo que cada hora de processamento efectivamente usada custa €9 e que cada litro de concentrado de fruta custa €0,50. A quantidade necessária do concentrado de fruta, o tempo de processamento e o preço de venda por cada litro de sumo, assim como a projecção máxima de vendas, são dados na tabela seguinte:

Sumo	S1	S2	S2
Concentrado (litros)	0,9	0,3	0,5
Tempo processamento (minutos)	0,1	0,7	0,5
Preço de venda (€)	1,80	1,10	1,50
Projecção de vendas (litros)	900	2000	1400

- a) [2,5] Apresente o modelo em programação linear que permite determinar o plano de produção da Fresh que **maximiza a receita**. Indique o significado das variáveis, assim como da função objectivo e das restrições.

**b) [1,0]** Suponha que a Fresh determinou que a produção do sumo S1 só deverá ocorrer caso sejam produzidos 500 ou mais litros deste sumo. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em **a)**.

**c) [1,5]** Suponha que o concentrado de fruta tem de ser adquirido em embalagens de 100 litros, mantendo-se o limite a adquirir, e que cada embalagem custa €50. Proceda às alterações necessárias ao modelo apresentado em **a)**.

3. A CAC produz acessórios para automóveis nas fábricas de Santarém e Valência. Os acessórios são depois enviados para quatro grandes centros de distribuição situados em Barcelona, Nantes, Milão e Frankfurt. Na tabela seguinte são apresentados os custos unitários de transporte entre cada fábrica e cada centro de distribuição, as capacidades das fábricas e a procura em cada centro de distribuição:

Fábrica	Centro de distribuição				Capacidade
	Barcelona	Nantes	Milão	Frankfurt	
Santarém	13	16	11	18	1250
Valência	10	15	9	19	750
Procura	175	325	480	950	

O responsável pela cadeia de abastecimento da CAC pretende determinar que quantidade transportar entre cada fábrica e cada centro de distribuição minimizando o custo total de transporte, mas garantindo que não são excedidas as capacidades disponíveis e que são cumpridas as procuras dos clientes. Considere as variáveis  $x_{ij}$  = número de acessórios a transportar entre a fábrica  $i$  e o centro de distribuição  $j$ , onde  $i = 1$  representa Santarém,  $i = 2$  representa Valência,  $j = 1$  representa Barcelona e assim sucessivamente.

a) [0,5] Escreva a função objectivo.

b) [0,5] Escreva a restrição relativa à quantidade enviada a partir de Santarém.

c) [0,5] Escreva a restrição relativa ao cumprimento da procura em Milão.

**d) [1,0]** Suponha agora que, a partir da fábrica de Santarém, só poderão ser enviados acessórios para, no máximo, dois dos centros de distribuição. Apresente todas as alterações ao modelo do caso inicial.

4. Considere o seguinte problema:

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.: } 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) [1,5] Resolva o problema graficamente. Justifique.

Considere o respectivo problema inteiro, ou seja:

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.: } 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ inteiros}$$

**b) [0,5]** Indique uma solução admissível para o problema inteiro. Justifique.

**c) [1,0]** Indique um limite superior e um limite inferior para o valor ótimo do problema inteiro. Justifique.

**d) [0,5]** A solução que indicou em **b)** é ótima? Justifique.

5. Um investidor está a considerar três tipos de acções nas quais investir com um orçamento fixo. O retorno anual esperado de cada tipo de acção é de 10%, 11% e 9%. Este investidor pretende minimizar o risco do investimento (medido através da variância-covariância), mas garantindo-lhe um retorno total anual esperado de pelo menos 10%. A fim de determinar a proporção do montante total a investir em cada tipo de acção, representada pelas variáveis  $x_i$ ,  $i=1,2,3$ , este investidor elaborou o modelo seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Min Risco} &= 0,021 x_1^2 + 0,070 x_2^2 + 0,003 x_3^2 + 2 * 0,018 x_1 x_2 - 2 * 0,003 x_1 x_3 + 2 * 0,006 x_2 x_3 \\ \text{s.a.:} & 0,10 x_1 + 0,11 x_2 + 0,09 x_3 \geq 0,10 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Os resultados obtidos com o Solver foram os seguintes:

Objective Cell		
Name	Original Value	Final Value
Risco	0	0,0143

Variable Cells			
Name	Final Value	Reduced Gradient	
x1	0,5046	0	
x2	0,2477	0	
x3	0,2477	0	

Constraints			
Name	Final Value	Lagrange Multiplier	
Retorno	0,1	2,7193	
Investimento	1	-0,2433	

Complete as frases seguintes:

- [0,5]** Este investidor deverá aplicar \_\_\_\_\_% nas acções do tipo 1, \_\_\_\_\_% nas acções do tipo 2 e \_\_\_\_\_% nas acções do tipo 3.
- [0,5]** O risco total esperado deste investimento é de \_\_\_\_\_.
- [0,5]** Caso o investidor pretenda um retorno total anual esperado de pelo menos 11%, o risco total esperado terá um aumento aproximado de \_\_\_\_\_.

RASCUNHO

RASCUNHO