ISCTE - IUL

Álgebra

Frequência/Exame

Licenciatura em Informática e Gestão de Empresas
Ano Lectivo 2015/2016, 1º semestre

4 de Janeiro de 2016

Nome do aluno:

Número do aluno:

Turma:

Exame / Frequência

Cotações:

1ª Parte: Escolha Múltipla	1.	2.	3.	4.
2ª Parte: Prova Escrita	1.(a)	1.(b)	1.(c)	1.(d)
	2.(a)	2.(b)		
	3.(a)	3.(b)		
3ª Parte: Prova Escrita	4.(a)	4.(b)		
	3.(a)	3.(b)		
	5.(a)	5.(b)		
	6.(a)	6.(b)		
	7.(a)	7.(b)	7.(c)	

Observações:

1. Duração da Frequência: 1h15. Duração do Exame: 2h30.
2. Esta prova tem uma **1ª parte (Exame)** com questões de escolha múltipla, onde deve assinalar a sua resposta com uma cruz (×) no espaço reservado (□). Cada questão tem **uma única resposta correta.** As **2ª (Exame)** e **3ª partes (Exame e Frequência)** são escritas. Deve responder a todas as questões nos espaços reservados às respostas. **Justifique convenientemente todas as respostas.**
3. As cotações do Exame são as assinaladas. As cotações da Frequência são o dobro do valor assinalado.
4. A prova deve ser efetuada **sem consulta.**

5. Respostas ilegíveis serão anuladas.

6. Só é permitida a utilização de material de escrita. Em particular, não é permitida a utilização de máquina de calcular. Só são corrigidas as respostas apresentadas a caneta.

7. Não é permitida a utilização de auscultadores ou telemóveis durante a realização da prova.

8. Não destaque as folhas do teste.

Escolha múltipla (EXAME)

(0.5 val.) 1. Um sistema linear homogéneo de 2 equações e 3 incógnitas tem 1 variável livre. Qual a dimensão do espaço solução?

- ☒ 1
- ☐ 2.
- ☐ 3.
- ☐ 5.

(0.5 val.) 2. Considere o subespaço $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ e as seguintes afirmações:

(I) $\dim V = 2$.

(II) $\mathcal{B} = \{(-2, 2, 0), (0, 0, -1)\}$ é base de V.

(III) $(1, 1, 0) \in V$.

Então:

- ☐ (I), (II) e (III) são verdadeiras.
- ☐ (I), (II) e (III) são falsas.
- ☐ (I) e (III) são falsas, (II) é verdadeira.
- ☒ (III) é falsa, (I) e (II) são verdadeiras.

(0.5 val.) 3. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases distintas de $\mathbb{R}^n$. Considere as matrizes $P = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $Q = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Podemos afirmar que:

- ☐ $PQP = I$.
- ☒ $PQ = I$.
- ☐ $QP = P$.
- ☐ $QP = Q$.

(0.5 val.) 4. Considere o polinómio característico de uma matriz $A \in M_{3\times 3}$,

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2,$$

e sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ vetores não nulos tais que $Au = 2u$ e $Av = 3v$.

Suponha que, para todo o vetor w tal que $\{u, v, w\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, tem-se

$$Aw \neq 2w \quad \text{e} \quad Aw \neq 3w.$$

Então, podemos concluir que:

- ☒ A não é diagonalizável.
- ☐ A é diagonalizável e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- ☐ A é diagonalizável e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ A é diagonalizável e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

2ª Parte: Prova Escrita (EXAME)

(3.5 val.) 1. Considere o sistema de 3 equações com incógnitas x, y, z, t cuja equação matricial $AX = B$ é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(0.5 val.) (a) Escreva o sistema na forma canónica.

$$\begin{cases} x+y+t=a \\ x-y+az+2t=b \\ x-y+z+2t=1 \end{cases}$$

(1.5 val.) (b) Usando o método de Gauss, discuta a natureza do sistema em função dos parâmetros a, b.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 2 & b \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 1-b \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -2 & a & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 1-b \end{array}\right] \qquad 1-a=0 \Leftrightarrow a=1$$

1) $a=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-b \end{array}\right]$

$b=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nexists \text{ linhas } 0\ 0\ 0\ 0 \mid k \neq 0 \\ R(A)=2<4=\text{n.º incógnitas} \end{array}\right\} \Rightarrow$ S.P.I.

$b \neq 1 \Rightarrow$ 3ª linha: $0\ 0\ 0\ 0 \mid 1-b \neq 0 \Rightarrow$ S.I.

2) $a \neq 1,\ \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nexists \text{ linhas } 0\ 0\ 0\ 0 \mid k \neq 0 \\ R(A)=3<4=\text{n.º incógnitas} \end{array}\right\} \Rightarrow$ S.P.I.

(0.75 val.) (c) Suponha $a = 1$ e $b = 1$. Resolva o sistema pelo método de Gauss.

$a = 1 = b \underset{(b)}{\Longrightarrow}$ S.P.I

Usando os cálculos anteriores,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x + y + t = 1 \\ -2y + z + t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - t \\ y = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} z - \frac{3}{2} t \\ y = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} t \end{cases}, \quad z, t \in \mathbb{R}$$

$$C.S. = \left\{ \left(1 - \tfrac{1}{2} z - \tfrac{3}{2} t , \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} t , z, t\right) : z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(0.75 val.) (d) Justifique se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

Os 3 hiperplanos de $\mathbb{R}^4$ que definem o sistema dado intersetam-se num plano de $\mathbb{R}^4$.

Cada equação do sistema é a equação de um hiperplano de $\mathbb{R}^4$. Resolver o sistema é determinar a intersecção dos 3 hiperplanos.

Para $a = b = 1$, vimos que os pontos onde os 3 hiperplanos se intersectam é da forma:

$$C.S = \left\{ \left(1 - \tfrac{1}{2} z - \tfrac{3}{2} t , \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} t , z , t\right) : z , t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= (1,0,0,0) + \text{span} \left\{ \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0\right), \left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \right\},$$

que representa um plano de $\mathbb{R}^4$ que passa no ponto $(1,0,0,0)$ e tem vectores directores $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$ e $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

A afirmação é verdadeira neste caso.

(2.5 val.) 2. Seja $A \in M_{m\times n}$. Se existir uma matriz $B \in M_{n\times m}$ tal que

$$AB = I_m,$$

diz-se que B é uma matriz **inversa de A à direita** e que A é **invertível à direita**. Analogamente, se existir uma matriz $C \in M_{n\times m}$ tal que

$$CA = I_n,$$

diz-se que C é uma matriz **inversa de A à esquerda** e que A é **invertível à esquerda**.

(1.5 val.) (a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz C inversa de A à esquerda. Conclua que C não é única.

$C \in M_{2\times 3}$, $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

$CA = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow a = e = 1, \quad b = d = 0, \quad c, f \in \mathbb{R}$

Logo, qualquer matriz da forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \end{bmatrix}$, $c, f \in \mathbb{R}$, é inversa de A à esquerda. Em particular, C não é única.

(1.0 val.) (b) Mostre que se $A \in M_{m\times n}$ é invertível à esquerda então A^t é invertível à direita.

A invertível à esquerda $\Rightarrow \exists\, C \in M_{n\times m} : CA = I_n$

$\Rightarrow (CA)^T = I_n^T \Rightarrow A^T C^T = I_n \Rightarrow C^T$ é uma inversa à direita de A^T, i.e., A^T é invertível à direita

(2.0 val.) 3. Considere a função linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y + z, 2z).$$

(0.5 val.) (a) Indique a matriz $A = M(f; b.c, b.c)$.

$$A = \begin{bmatrix} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1.5 val.) (b) Determine a expressão analítica de $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por

$$B = M(g; b.c, b.c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $h(3, 4)$.

$$h(x,y) = AB\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= (2x + y, 2x)$$

$$\Longrightarrow h(3,4) = (10, 6)$$

3ª Parte: Prova Escrita (EXAME/FREQUÊNCIA)

(2.5 val.) 4. Considere a função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = M(f; b.c, b.c) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1.5 val.) (a) Seja $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e seja $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Suponha que

$$e_1 = v_1 + v_3 \ , \ e_2 = v_1 + v_2 \ , \ e_3 = v_3,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Use matrizes mudança de base para determinar $A' = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$$\begin{tikzcd} \underset{b.c}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"', "A"] & \underset{b.c}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "Q"] \\ \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'"'] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

$$A' = QAP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, b.c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = M(id_{\mathbb{R}^3}; b.c., \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e_1 = (1,0,1)_{\mathcal{B}'}$

$e_2 = (1,1,0)_{\mathcal{B}'}$

$e_3 = (0,0,1)_{\mathcal{B}'}$

(1.0 val.) (b) Seja $u = (1,3)$. Calcule $f(u)$ usando a matriz A'.

$u = (1,3) \implies f(u) = A' u_{\mathcal{B}}$

$(1,3) = -5(1,0) + 3 \cdot (2,1) = (-5,3)_{\mathcal{B}}$

$$\implies f(u) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

(2.5 val.) 5. Sejam $A, B \in M_{3\times 3}$ e suponha que $\det(A) = 3$ e $\det(B) = 2$.

(1.5 val.) (a) Usando propriedades dos determinantes, calcule

$$\det(AB^2)\ ,\ \det(2A^{-1})\ ,\ \det(A^t).$$

$$\det(AB^2) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(B) = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

$$\det(2A^{-1}) = 2^3 \frac{1}{\det(A)} = \frac{8}{3}$$

$$\det(A^t) = \det(A) = 3$$

(1.0 val.) (b) Mostre, através de um exemplo com matrizes 2×2, que podemos ter

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B) = 5.$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 3 \\ \\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \det(A) + \det(B) = 5$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A+B) = 12 \neq \det(A) + \det(B) = 5$$

(2.5 val.) 6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1.0 val.) (a) Determine os valores próprios de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 6$$

Valores próprios: $\lambda = 0$, $\lambda = 6$

(1.5 val.) (b) Determine uma base para o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$. Conclua que A é diagonalizável e indique a matriz $D \in M_{2\times 2}$, com D diagonal, tal que $D = P^{-1}AP$.

$$\lambda = 0: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 3x + 3y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$\Rightarrow$ $v = (-y, y)$, $y \neq 0$ vect. pps assoc. a $\lambda = 0$

$\Rightarrow$ $V_0 = \text{span}\{(-1,1)\}$ e uma base é $\{(-1,1)\}$

Como $\lambda = 6$ é valor próprio, existe $u \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$, vector próprio associado e l.i. com $(-1,1)$.

Logo, $\{(-1,1), u\}$ é base de $\mathbb{R}^2$ e A é diagonalizável.

Uma matriz diagonal D t.q. $D = P^{-1}AP$ é $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

(2.5 val.) 7. Considere as seguintes questões de séries numéricas:

(0.75 val.) (a) $\sum_{n\geq 1}\left[(-1)^n - \frac{1}{n^3}\right]^2$

$$a_n = \left[(-1)^n - \frac{1}{n^3}\right]^2 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(-1)^n - \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}\right]^2 = 1 \neq 0$$

$\implies \sum a_n$ divergente

critério

condição necessária

convergência

(1.0 val.) (b) $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2\,2^n}{3^{n+1}}$

$$a_n = \frac{n^2\,2^n}{3^{n+1}} \geq 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2\,\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{n^2\,\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{3} \longrightarrow 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

Pelo critério da razão, a série converge.

(0.75 val.) (c) Mostre através de um contra-exemplo que a seguinte afirmação é falsa:

Se $\sum_{n\geq 1} a_n$ é uma série convergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada então a série $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ é convergente.

Sugestão: use uma série alternada simplesmente convergente.

$\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ é uma série convergente (simplesmente convergente; vimos nas aulas)

$b_n = (-1)^n$ limitado: $-1 \leq b_n \leq 1$, $\forall n$

No entanto,

$\sum_{n\geq 1} a_n b_n = \sum (-1)^n \frac{1}{n} (-1)^n = \sum (-1)^{2n} \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n}$ é

a série harmónica, que sabemos ser divergente.

Folha de rascunho